MT09 P24 - Feuille de TD n° 7
Méthodes itératives de calcul de valeurs propres

Exercice 1 : puissance itérées, inverses et déflation

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les vecteurs propres et valeurs propres de A ? Montrer que

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. **Puissance itérées. -** Pour $\boldsymbol{x}^{(0)}$ quelconque, appliquez la méthodes des puissances itérées. On choisit $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1, 0)^T$. Montrez que

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 + 3^n \\ 1 - 3^n \end{pmatrix}}{\sqrt{(3^n + 1)^2 + (3^n - 1)^2}}.$$

   Que vaut $\lim\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{x}^{(n)}$?

3. Calculez la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\hat{\lambda}^{(n)} = (\boldsymbol{x}^{(n)})^T A \, \boldsymbol{x}^{(n)}.$$

4. **Puissances inverses. -** Appliquez la méthode de la puissance inverse (avec $q = 0$ du cours) :

$$A\boldsymbol{z}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n)}, \quad \boldsymbol{x}^{(n+1)} = \frac{\boldsymbol{z}^{(n)}}{\|\boldsymbol{z}^{(n)}\|}.$$

   en prenant toujours $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1, 0)^T$. Montrez que

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 + 3^{-n} \\ 1 - 3^{-n} \end{pmatrix}}{\sqrt{(1 + 3^{-n})^2 + (1 - 3^{-n})^2}}.$$

   et calculez $\lim\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{x}^{(n)}$.

5. **Déflation. -** Soit $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)^T$. Calculer

$$B = A - 3 \, \boldsymbol{v}_2 (\boldsymbol{v}_2)^T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

   ainsi que les valeurs propres de B. Que calculera la méthode des puissances itérées sur B ?

Exercice 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et R la matrice de rotation d'angle θ. Soit $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Appliquez la méthode des puissances itérées sur la matrice R. Que vaut $\boldsymbol{x}^{(n)}$? Pourquoi le résultat du théorème du cours ne s'applique pas ici ?

Exercice 3. Application : vibration d'une corde

Une corde de longueur L, de masse linéique ρ et de coefficient de raideur κ est attachée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$. Sous l'hypothèse de petits déplacements verticaux, les équations de cinématique et de bilan de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v,$$
$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Aux extrémités, on a les conditions de déplacements nuls, soit $u(0,t) = u(L,t) = 0$ pour tout t.

1. En cherchant une solution non identiquement nulle à variables séparées $u(x,t) = \varphi(t)\bar{u}(x)$, montrez que $\bar{u}(x)$ satisfait les équations

$$-\bar{u}''(x) = \lambda \bar{u}(x) \quad x \in (0, L), \tag{1}$$
$$\bar{u}(0) = \bar{u}(L) = 0 \tag{2}$$

   pour un certain réel $\lambda > 0$ inconnu. Déterminer les solutions $\bar{u}(x)$ admissibles, puis les solutions $u(x,t)$ admissibles.

2. Pour une fonction au moins trois fois dérivable $u(x)$ et h assez petit, montrer par développement de Taylor que

$$-u''(x) \approx \frac{-u(x-h) + 2u(x) - u(x+h)}{h^2} + h\,\varepsilon(h).$$

3. La discrétisation par différences finies de (1),(2) avec n points de discrétisation revient à chercher un couple vecteur propre-valeur propre $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ solution de

$$A_n \boldsymbol{x} = \lambda\, \boldsymbol{x}$$

   où $A_n \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est donnée par

$$A_n = (n+1)^2\, \mathrm{tridiag}(-1,\, 2,\, -2).$$

4. Appliquer la méthode de la puissance inverse en vue de calculer la valeur propre de A_n la plus petite. Quelle méthode directe ou itérative suggérez-vous pour résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{z}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)}$?

Commentaire. – Dans ce cas particulier (monodimensionnel), on peut montrer que les valeurs propres de A_n sont données analytiquement par

$$\lambda_k = \frac{4(n+1)^2}{L^2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Pour n assez grand, on voit que

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_n \approx \frac{4(n+1)^2}{L^2} \to +\infty.$$