MT09 A25 - Feuille de TD n° 7 Méthodes itératives de calcul de valeurs propres

Exercice 1 : puissances itérées, inverses et déflation

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les vecteurs propres et valeurs propres de A? Montrer que

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. **Puissance itérées.** - Pour $x^{(0)}$ quelconque, appliquez la méthodes des puissances itérées. On choisit $x^{(0)} = (1,0)^T$. Montrez que

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \frac{\begin{pmatrix} 1+3^n \\ 1-3^n \end{pmatrix}}{\sqrt{(3^n+1)^2 + (3^n-1)^2}}.$$

Que vaut $\lim_{n\to\infty} x^{(n)}$?

3. Calculez la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\hat{\lambda}^{(n)} = (\boldsymbol{x}^{(n)})^T A \, \boldsymbol{x}^{(n)}.$$

4. **Puissances inverses.** - Appliquez la méthode de la puissance inverse (avec q=0 du cours) :

$$Az^{(n)} = x^{(n)}, \quad x^{(n+1)} = \frac{z^{(n)}}{\|z^{(n)}\|}.$$

en prenant toujours $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1,0)^T.$ Montrez que

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \frac{\begin{pmatrix} 1+3^{-n} \\ 1-3^{-n} \end{pmatrix}}{\sqrt{(1+3^{-n})^2 + (1-3^{-n})^2}}.$$

et calculez $\lim_{n\to\infty} x^{(n)}$.

5. **Déflation.** - Soit $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)^T$. Calculer

$$B = A - 3 \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_2)^T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

ainsi que les valeurs propres de B. Que calculera la méthode des puissances itérées sur B?

1

Exercice 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et R la matrice de rotation d'angle θ . Soit $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Appliquez la méthode des puissances itérées sur la matrice R. Que vaut $\boldsymbol{x}^{(n)}$? Pourquoi le résultat du théorème du cours ne s'applique pas ici?

Exercice 3. Application: vibration d'une corde

Une corde de longueur L, de masse linéique ρ et de coefficient de raideur κ est attachée à ses deux extrémités x=0 et x=L. Sous l'hypothèse de petits déplacements verticaux, les équations de cinématique et de bilan de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = v, \\ &\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Aux extrémités, on a les conditions de déplacements nuls, soit u(0,t) = u(L,t) = 0 pour tout t.

1. En cherchant une solution non identiquement nulle à variables séparées $u(x,t) = \varphi(t)\bar{u}(x)$, montrez que $\bar{u}(x)$ satisfait les équations

$$-\bar{u}''(x) = \lambda \bar{u}(x) \quad x \in (0, L), \tag{1}$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}(L) = 0 \tag{2}$$

pour un certain réel $\lambda > 0$ inconnu. Déterminer les solutions $\bar{u}(x)$ admissibles, puis les solutions u(x,t) admissibles.

2. Pour une fonction au moins trois fois dérivable u(x) et h assez petit, montrer par développement de Taylor que

$$-u''(x) \approx \frac{-u(x-h) + 2u(x) - u(x+h)}{h^2} + h\,\varepsilon(h).$$

3. La discrétisation par différences finies de (1),(2) avec n points de discrétisation revient à chercher un couple vecteur propre-valeur propre (\boldsymbol{x},λ) solution de

$$A_n \boldsymbol{x} = \lambda \, \boldsymbol{x}$$

où $A_n \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est donnée par

$$A_n = (n+1)^2 \operatorname{tridiag}(-1, 2, -2).$$

4. Appliquer la méthode de la puissance inverse en vue de calculer la valeur propre de A_n la plus petite. Quelle méthode directe ou itérative suggérez-vous pour résoudre le système linéaire $A\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)}$?

Commentaire. – Dans ce cas particulier (monodimensionnel), on peut montrer que les valeurs propres de A_n sont données analytiquement par

$$\lambda_k = \frac{4(n+1)^2}{L^2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right), \quad 1 \le k \le n.$$

Pour n assez grand, on voit que

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \lambda_n \approx \frac{4(n+1)^2}{L^2} \to +\infty.$$