MT09-A2024 – Examen médian – Questions de cours
Durée : **15 mins**. *Sans documents ni outils électroniques*
Rédiger directement sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n^o :

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Soit $\|.\|$ une norme vectorielle. Donner la définition d'une norme matricielle subordonnée à $\|.\|$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Donner les expressions des normes matricielles subordonnées $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_2$ (on précisera bien les bornes de sommation pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$).

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Donnez l'expression matricielle de la méthode itérative de Gauss-Seidel de résolution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. On précisera bien les matrices qui sont utilisées.

2. Donner l'expression développée de $x_i^{(k+1)}$ (pour une composante i quelconque) en fonction des $x_j^{(k)}$ et $x_j^{(k+1)}$ précédemment calculés.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ inversible et $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée quelconque. Montrer que
$$\mathrm{Cond}_{\|.\|}(A) \geq 1.$$

2. Pour $\alpha \neq 0$, que vaut $\mathrm{Cond}_{\|.\|}(\alpha I)$? Réponse :

3. Pour $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ symétrique inversible, que vaut $\chi_2(A) = \mathrm{Cond}_{\|.\|_2}(A)$? Réponse :

MT09-A2024 – Examen médian
Durée : **1h15**.
Notes et polycopiés de cours autorisés.
Smartphones et tout outil électronique interdits.

Questions de cours déjà traitées : *6 points.*

Exercice 1 *(barème approximatif : 4 points)*

1. Effectuer (par la méthode de votre choix) la factorisation LU de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
avec L matrice triangulaire inférieure constituée de 1 (uns) sur la diagonale.
2. Montrer que $U = 4L^T$.
3. Que peut-on en conclure sur la matrice A ?

Exercice 2 *(barème approximatif : 10 points)*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et soit μ un réel strictement positif. Soit $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Dans cet exercice, on considère la méthode itérative suivante
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (I - \mu A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \mu\, \boldsymbol{b}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{1}$$
pour la résolution du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

1. Montrer que cette méthode itérative rentre dans le cadre du cours
$$M\boldsymbol{x}^{(k+1)} = N\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$
avec $A = M - N$ et M matrice inversible, où l'on précisera M et N en fonction de μ.
2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode itérative (1) ?

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ définie par
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que A est symétrique définie positive.
4. Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A (on ordonnera les v.p. selon $\lambda_1 < \lambda_2$).
5. Quelles sont les valeurs propres de $I - \mu A$?
6. Tracer la courbe
$$\mu \mapsto \max\left(|1 - \mu\lambda_1|, |1 - \mu\lambda_2|\right)$$
pour $\mu \in [0, +\infty[$. Calculer $\rho(I - \mu A)$, le rayon spectral de $I - \mu A$.
7. En déduire un intervalle ouvert de μ pour lequel la méthode (1) converge.
8. Quel est le $\mu^\star$ optimal pour lequel la méthode converge le plus vite ?
9. Calculer $\alpha = \rho(I - \mu^\star A)$.
10. Que vaut $\chi_2(A)$ (le conditionnement en norme $\|.\|_2$ de A) ?
11. Montrer que
$$\alpha = \frac{\chi_2(A) - 1}{\chi_2(A) + 1}.$$
12. Soit $\boldsymbol{x}^\star$ tel que $\boldsymbol{x}^\star = (I - \mu^\star A)\boldsymbol{x}^\star + \mu^\star\, \boldsymbol{b}$. Montrer que, pour $\mu = \mu^\star$,
$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^\star\|_2 \leq \alpha^k\, \|\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}^\star\|_2.$$