Ex1 – Par Dolittle, pivots de Gauss ou identification, on trouve

1 – $A = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$.

2 – On constate que $U = 4L^T$.

3 – Donc $A = LU = L(4L^T) = (2L)(2L)^T$. On pose $B = 2L$

On a $A = BB^T$, B triangulaire inférieure et $b_{ii} > 0 \ \forall i$

$\Rightarrow$ A admet une factorisation de Choleski $\Rightarrow$ A sdp.

Ex 2 –

1 – La méthode itérative s'écrit $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ avec

$M = \frac{1}{\mu} I$ et $N = \frac{1}{\mu} I - A$. Pour $\mu > 0$, M est inversible.

2 – D'après le cours, une CNS de convergence est

$$\rho(M^{-1}N) = \rho(I - \mu A) < 1.$$

3 – Voir 4 –

4 – $\operatorname{tr} A = 6 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det A = 9 - 4 = 5 = \lambda_1 . \lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$.

A sym avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ donc A sdp (répond à la question 3.)

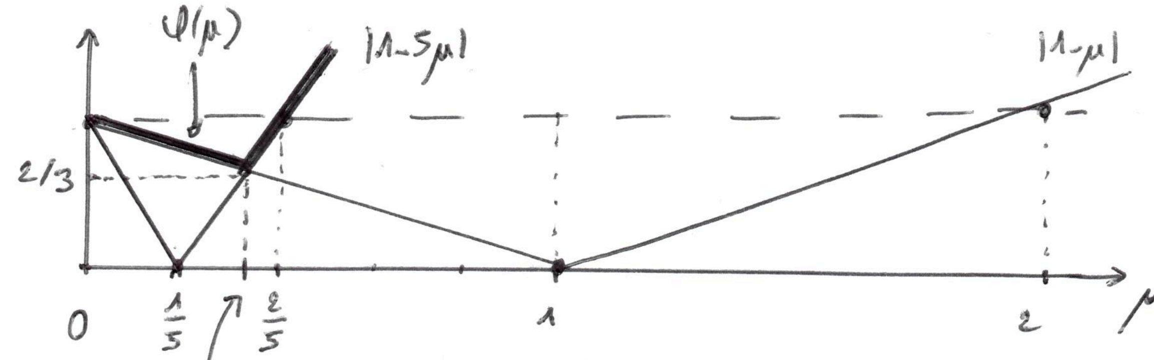
5 – $Ay_i = \lambda_i y_i$, $i = 1, 2 \longrightarrow -\mu A y_i = -\mu \lambda_i y_i$

On a aussi $I y_i = 1 . y_i \Rightarrow (I - \mu A) y_i = (1 - \mu \lambda_i) y_i$, $i = 1, 2$.

$\Rightarrow$ Les v.p de $I - \mu A$ sont $(1 - \mu\lambda_1)$ et $(1 - \mu \lambda_2)$.

6 – Soit $\varphi(\mu) = \max(|1 - \mu\lambda_1|, |1 - \mu\lambda_2|) = \max(|1-\mu|, |1 - 5\mu|)$

On a aussi $\varphi(\mu) = \rho(I - \mu A)$.



$\mu^* /\ 1-\mu^* = 5\mu^* - 1 \Longrightarrow \mu^* = \frac{1}{3}$

$$\rho(I-\mu A) = \begin{cases} 1-\mu & \text{si } \mu \leq \mu^*, \\ 5\mu - 1 & \text{si } \mu > \mu^*. \end{cases}$$

On a aussi $\mu^* = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}$. $\rho(I-\mu A)$ est minimal pour $\mu = \mu^*$.

7- La méthode (1) converge $\Longleftrightarrow \rho(I-\mu A) < 1$

$\Longleftrightarrow \varphi(\mu) < 1$

$\Longleftrightarrow \mu \in]0, \frac{2}{5}[$.

8- La méthode converge le plus vite $\Longleftrightarrow \rho(I-\mu A)$ minimal

$\Longleftrightarrow \mu = \mu^*$.

9- $\alpha = \rho(I-\mu^* A) = \varphi(\mu^*) = 1-\mu^* = \frac{2}{3}$.

10- A est symétrique, donc d'après le cours $\chi_2(A) = \dfrac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|}$

Donc $\chi_2(A) = \frac{5}{1} = 5 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

11- $$\alpha = 1-\mu^* = 1 - \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$= \frac{\lambda_2/\lambda_1 - 1}{\lambda_2/\lambda_1 + 1} = \frac{\chi_2(A)-1}{\chi_2(A)+1}.$$

12- $$\begin{cases} x^{(k+1)} = (I-\mu^* A)x^{(k)} + \mu^* b \\ x^* = (I-\mu^* A)x^* + \mu^* b \end{cases} \Longrightarrow x^{(k+1)} - x^* = (I-\mu^* A)(x^{(k)} - x^*)$$

En prenant la norme 2 de l'expression,

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_2 = \|(I - \mu^* A)(x^{(k)} - x^*)\|_2$$

$$\leqslant \|I - \mu^* A\|_2 \cdot \|x^{(k)} - x^{(*)}\|_2$$

mais A symétrique $\Rightarrow$ $(I - \mu^* A)$ symétrique

$$\Rightarrow \|I - \mu^* A\|_2 = \rho(I - \mu^* A) = \alpha.$$

On a donc

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_2 \leqslant \alpha \|x^{(k)} - x^*\|_2.$$

Par récurrence,

$$\|x^{(k)} - x^*\|_2 \leqslant \alpha^k \|x^{(0)} - x^*\|_2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_2 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

■