# MT09 P24 - Feuille de TD n° 8
# Approximation aux moindres carrés

## Exercice 1 : droites de régression

Soit $(x_i, y_i)$, $i = 1, ..., m$ un ensemble de données dans $\mathbb{R}^2$.

1. On cherche la fonction constante $f(x) = c$ qui minimise les écarts aux carrés

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - f(x_i))^2.$$

Écrire la fonction $\varphi(c)$ à minimiser sous la forme $\alpha c^2 + \beta c + \delta$. Que vaut le $c$ qui réalise le minimum ?

2. On cherche la meilleure approximation affine $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimise les écarts aux carrés :

$$\min_{(a,b)} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - f(x_i))^2.$$

Montrer que le problème est équivalent au problème sous forme matricielle

$$\min_{\boldsymbol{u}=(a,b)^T} \quad \frac{1}{2}\|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice $A$ et le vecteur $\boldsymbol{y}$.

3. Montrer que $a$ et $b$ sont solutions du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}.$$

4. Ce système est-il toujours inversible ? Indication : calculez le déterminant de la matrice du système. Remarquez que la fonction

$$\eta : (x_1, ..., x_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

est strictement convexe et utilisez une inégalité de convexité.

## Exercice 2 : régression affine par morceaux

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$\varphi(x) = \max(0, 1 - |x|).$$

Tracez la fonction $\varphi$ sur l'intervalle $[-3, 3]$. On appelle $\varphi$ la fonction 'chapeau'.

2. Pour des réels $u_j$, $j = -n, ..., 0, ..., n$, on considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n} u_j\, \varphi(x - j).$$

Que vaut $f$ restreinte à l'intervalle $[0, 1]$ ? Quelle est la nature de la fonction $f$ ? Tracer la fonction

$$f(x) = 3\,\varphi(x + 1) - \varphi(x) + \varphi(x - 1).$$

3. On considère maintenant $n = 1$ (trois coefficients $u_{-1}$, $u_0$ et $u_1$). On cherche à minimiser les écarts aux carrés

$$\min_{(u_{-1},u_0,u_1)} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - f(x_i))^2.$$

Réécrire le problème sous la forme

$$\min_{\boldsymbol{u}=(u_{-1},u_0,u_1)^T} \quad \frac{1}{2}\|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice $A$ et le vecteur $\boldsymbol{y}$. Écrire les équations normales.

## Exercice 3 : projection orthogonale sur l'image

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On souhaite montrer les propriétés

$$(\ker A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^T, \qquad \ker A^T = (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

1. Montrer successivement les assertions suivantes (laissé aux fans) :
   - $\operatorname{Im} A^T \subset (\ker A)^{\perp}$ ;
   - $\forall U$ s.e.v, $U^{\perp\perp} = U$ (en dimension finie) ;
   - $(\operatorname{Im} A^T)^{\perp} \subset \ker A$ ;
   - $(\ker A)^{\perp} \subset (\operatorname{Im} A^T)^{\perp\perp}$ ;
   - $\operatorname{Im} A^T \subset (\ker A)^{\perp} \subset (\operatorname{Im} A^T)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} A^T$ ;
   - $(\ker A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^T$ ;
   - $\ker A^T = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.
2. On définit la projection orthogonale $\pi\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{y}$ sur $\operatorname{Im} A$ :

$$\pi\boldsymbol{y} = \arg\min_{\boldsymbol{z}\in \operatorname{Im} A} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\| = \arg\min_{\boldsymbol{z}\in \operatorname{Im} A} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|^2.$$

La solution $\pi\boldsymbol{y}$ a les propriétés d'appartenance et d'orthogonalité suivantes :

$$\pi\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} A \ ;$$
$$\langle \pi\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} A.$$

Montrer que $\pi\boldsymbol{y}$ s'écrit $\pi\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ avec $\boldsymbol{x}$ solution de

$$A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{y}.$$