MT09 A25 - Feuille de TD n° 8 Approximation aux moindres carrés

Exercice 1 : droites de régression

Soit $m \geq 2$ et (x_i, y_i) , i = 1, ..., m un ensemble de données dans \mathbb{R}^2 .

1. On cherche la fonction constante f(x) = c qui minimise les écarts aux carrés

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (y_i - f(x_i))^2.$$

Écrire la fonction $\varphi(c)$ à minimiser sous la forme $\alpha c^2 + \beta c + \delta$. Que vaut le c qui réalise le minimum?

2. On cherche la meilleure approximation affine f(x) = ax + b, $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimise les écarts aux carrés :

$$\min_{(a,b)} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (y_i - f(x_i))^2.$$

Montrer que le problème est équivalent au problème sous forme matricielle

$$\min_{\boldsymbol{u}=(a,b)^T} \quad \frac{1}{2} \|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice A et le vecteur y.

3. Montrer que a et b sont solutions du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}.$$

4. Ce système est-il toujours inversible? *Indication* : calculez le déterminant de la matrice du système 2×2 . En notant $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i$, développez

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x} + \bar{x})^2 - \bar{x}^2.$$

1

Que représente cette grandeur?

Exercice 2: régression affine par morceaux

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$\varphi(x) = \max(0, 1 - |x|).$$

Tracez la fonction φ sur l'intervalle [-3,3]. On appelle φ la fonction 'chapeau'.

2. Pour des réels u_j , j=-n,...,0,...,n, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n} u_j \, \varphi(x-j).$$

Que vaut f restreinte à l'intervalle [0,1]? Quelle est la nature de la fonction f? Tracer la fonction

$$f(x) = 3\varphi(x+1) - \varphi(x) + \varphi(x-1).$$

3. On considère maintenant n=1 (trois coefficients $u_{-1},\,u_0$ et u_1). On cherche à minimiser les écarts aux carrés

$$\min_{(u_{-1}, u_0, u_1)} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (y_i - f(x_i))^2.$$

Réécrire le problème sous la forme

$$\min_{\boldsymbol{u} = (u_{-1}, u_0, u_1)^T} \quad \frac{1}{2} \|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice A et le vecteur y. Écrire les équations normales.

Exercice 3: projection orthogonale sur l'image

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On souhaite montrer les propriétés

$$(\ker A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^{T}, \qquad \ker A^{T} = (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

- 1. Montrer successivement les assertions suivantes (laissé aux fans) :
 - $\operatorname{Im} A^T \subset (\ker A)^{\perp}$;
 - $\forall U$ s.e.v, $U^{\perp\perp} = U$ (en dimension finie);
 - $-- (\operatorname{Im} A^T)^{\perp} \subset \ker A$;
 - $(\ker A)^{\perp} \subset (\operatorname{Im} A^T)^{\perp \perp};$
 - $\operatorname{Im} A^T \subset (\ker A)^{\perp} \subset (\operatorname{Im} A^T)^{\perp \perp} = \operatorname{Im} A^T;$
 - $-- (\ker A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^T;$
 - $-- \ker A^T = (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$
- 2. On définit la projection orthogonale πy de y sur Im A:

$$\pi \boldsymbol{y} = \arg\min_{\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} A} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\| = \arg\min_{\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} A} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|^2.$$

La solution πy a les propriétés d'appartenance et d'orthogonalité suivantes :

$$\pi y \in \operatorname{Im} A$$
;
 $\langle \pi y - y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in \operatorname{Im} A.$

Montrer que πy s'écrit $\pi y = Ax$ avec x solution de

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{y}.$$