MT09 A26 - Feuille de TD n° 9
Interpolation polynomiale

Exercice 1 : interpolation dans la base de Lagrange

1. Écrire la base de polynômes de Lagrange $\mathcal{L}_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ pour trois points d'interpolation (x_1, x_2, x_3). Écrire l'expression du polynôme d'interpolation $p(x)$ de degré inférieur ou égal à 2 passant par les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

2. Soit $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ et $y_i = (x_i)^4$, $i = 1, 2, 3$. Que vaut $p(x)$? En utilisant le résultat du cours, donnez une majoration de

$$|x^4 - p(x)|$$

pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 2 : interpolation dans la base de Newton

Soit les points d'interpolation $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 2, 3)$ et une fonction f telle que $f(x_i) = y_i$, $i = 1, ..., 4$.

1. (cours) Rappeler l'écriture du polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à 3 sous sa forme de Newton. On représentera le tableau des différences divisées.
2. (cours) Comment se calcule le polynôme avec l'algorithme de Horner ?
3. Calculer le polynôme d'interpolation avec les valeurs $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 1, 4, 9)$. Interprétez.

Exercice 3 : interpolation de Hermite

1. Calculer les polynômes q_1, q_2, q_3 et q_4 de degré 3 qui satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{array}{llll} q_1(0) = 1, & q_1(1) = 0, & q_1'(0) = 0, & q_1'(1) = 0, \\ q_2(0) = 0, & q_2(1) = 1, & q_2'(0) = 0, & q_2'(1) = 0, \\ q_3(0) = 0, & q_3(1) = 0, & q_3'(0) = 1, & q_3'(1) = 0, \\ q_4(0) = 0, & q_4(1) = 0, & q_4'(0) = 0, & q_4'(1) = 1. \end{array}$$

   Indication : profitez des racines des polynômes pour factoriser et exploitez les symétries possibles (déduire q_2 de q_1 et q_4 de q_3).

2. Soit p le polynôme tel que

$$p(x) = \alpha_1\, q_1(x) + \alpha_2\, q_2(x) + \alpha_3\, q_3(x) + \alpha_4\, q_4(x).$$

   Quelles propriétés satisfait le polynôme p ? Trouver le polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$p(0) = 1, \quad p(1) = -2, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2.$$

3. Sans calculs supplémentaires, écrire le polynôme r de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$r(1) = -2, \quad r(2) = 0, \quad r'(1) = 2, \quad r'(2) = 0.$$

4. Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{sur } [0, 1[, \\ q(x) & \text{sur } [1, 2]. \end{cases}$$

Quelle est la plus grande régularité de f (quelle classe $\mathcal{C}^k$) ?

Exercice 4 : interpolation de Lagrange sur triangle unité

On considère le triangle ABC avec $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ et $C(0, 1)$ (triangle dit 'unité').

1. Calculer les polynômes $p_A(x, y)$, $p_B(x, y)$ et $p_C(x, y)$ de degré 1 en les variables x et y tels que

$$\begin{aligned} &p_A(A) = 1, \quad p_A(B) = 0, \quad p_A(C) = 0, \\ &p_B(A) = 0, \quad p_B(B) = 1, \quad p_B(C) = 0, \\ &p_C(A) = 0, \quad p_C(B) = 0, \quad p_C(C) = 0. \end{aligned}$$

2. Trouver le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 en (x, y) tel que

$$p(A) = y_A, \quad p(B) = y_B, \quad p(C) = y_C.$$

Exercice 5 : interpolation de Lagrange sur triangle quelconque, coordonnées barycentriques

On considère maintenant un triangle ABC quelconque de sommets $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$. Pour considérer des points $M(x, y)$ dans le triangle ABC, il est pratique de travailler en coordonnées dites barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1$ telles que

$$\begin{cases} \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C &= M(x, y), \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1. \end{cases}$$

On a un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. On voit que $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$.

1. Montrer que

$$\lambda_1(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x & x_B & x_C \\ y & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\det(MB, MC)}{\det(AB, AC)}.$$

2. Par permutation, trouver les expressions pour $\lambda_2(x, y)$ et $\lambda_3(x, y)$.
3. Vérifiez que le polynôme d'interpolation $p(x, y)$ de degré inférieur ou égal à 1 tel que

$$p(A) = z_A, \quad p(B) = z_B, \quad p(C) = z_C$$

s'écrit

$$p(x, y) = z_A \, \lambda_1(x, y) + z_B \, \lambda_2(x, y) + z_C \, \lambda_3(x, y).$$