MT09 P24 - Feuille de TD n° 9
Interpolation polynomiale

Exercice 1 : interpolation dans la base de Newton

Soit les points d'interpolation $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 2, 3)$ et une fonction f telle que $f(x_i) = y_i$, $i = 1, ..., 4$.

1. (cours) Rappeler l'écriture du polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à 3 sous sa forme de Newton. On représentera le tableau des différences divisées.
2. (cours) Comment s'écrit le polynôme avec l'algorithme de Horner ?
3. Calculer le polynôme d'interpolation avec les valeurs $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 1, 4, 9)$.

Exercice 2 : interpolation de Hermite

1. Calculer les polynômes q_1, q_2, q_3 et q_4 de degré 3 qui satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{array}{llll} q_1(0) = 1, & q_1(1) = 0, & q_1'(0) = 0, & q_1'(1) = 0, \\ q_2(0) = 0, & q_2(1) = 1, & q_2'(0) = 0, & q_2'(1) = 0, \\ q_3(0) = 0, & q_3(1) = 0, & q_3'(0) = 1, & q_3'(1) = 0, \\ q_4(0) = 0, & q_4(1) = 0, & q_4'(0) = 0, & q_4'(1) = 1. \end{array}$$

   Indication : profitez des racines pour factoriser et exploitez les symétries possibles (déduire q_2 de q_1 et q_4 de q_3).

2. Soit p le polynôme tel que

$$p(x) = \alpha_1\, q_1(x) + \alpha_2\, q_2(x) + \alpha_3\, q_3(x) + \alpha_4\, q_4(x).$$

   Quelles propriétés satisfait le polynôme p ? Trouver le polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$p(0) = 1, \quad p(1) = -2, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2.$$

3. Sans calculs supplémentaires, écrire le polynôme r de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$r(1) = -2, \quad r(2) = 0, \quad r'(1) = 2, \quad r'(2) = 0.$$

4. Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{sur } [0, 1[, \\ q(x) & \text{sur } [1, 2]. \end{cases}$$

   Quelle est la plus grande régularité de f (quelle classe $\mathcal{C}^k$) ?

Exercice 3 : interpolation de Lagrange sur triangle unité

On considère le triangle ABC avec $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0,1)$ (triangle dit 'unité').

1. Calculer les polynômes $p_A(x,y)$, $p_B(x,y)$ et $p_C(x,y)$ de degré 1 en les variables x et y tels que

$$\begin{aligned} p_A(A) &= 1, \quad p_A(B) = 0, \quad p_A(C) = 0, \\ p_B(A) &= 0, \quad p_B(B) = 1, \quad p_B(C) = 0, \\ p_C(A) &= 0, \quad p_C(B) = 0, \quad p_C(C) = 0. \end{aligned}$$

2. Trouver le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 en (x,y) tel que

$$p(A) = y_A, \quad p(B) = y_B, \quad p(C) = y_C.$$

Exercice 4 : interpolation de Lagrange sur triangle quelconque, coordonnées barycentriques

On considère maintenant un triangle ABC quelconque de sommets $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$. Pour considérer des points $M(x,y)$ dans le triangle ABC, il est pratique de travailler en coordonnées dites barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1$ telles que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C, \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{aligned}$$

On a un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. On voit que $\lambda_i = \lambda_i(x,y)$, $i = 1,2,3$.

1. Montrer que

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & x_B & x_C \\ y & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\det(MB, MC)}{\det(AB, AC)}.$$

2. Par permutation, trouver les expressions pour λ_2 et λ_3.
3. Vérifiez que le polynôme d'interpolation $p(x,y)$ de degré inférieur à 1 tel que

$$p(A) = y_A, \quad p(B) = y_B, \quad p(C) = y_C$$

   s'écrit

$$p(x,y) = y_A \lambda_1(x,y) + y_B \lambda_2(x,y) + y_C \lambda_1(x,y).$$

4. Écrire en pseudo-code l'algorithme complet qui calcule ce polynôme.