MT09 A25 - Feuille de TD n° 9 Interpolation polynomiale

Exercice 1 : interpolation dans la base de Lagrange

- 1. Écrire la base de polynômes de Lagrange $\mathcal{L}_i(x)$, i = 1, 2, 3 pour trois points d'interpolation (x_1, x_2, x_3) . Écrire l'expression du polynôme d'interpolation p(x) de degré inférieur ou égal à 2 passant par les points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) .
- 2. Soit $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ et $y_i = (x_i)^4$, i = 1, 2, 3. Que vaut p(x)? En utilisant le résultat du cours, donnez une majoration de

$$|x^4 - p(x)|$$

pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 2 : interpolation dans la base de Newton

Soit les points d'interpolation $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 2, 3)$ et une fonction f telle que $f(x_i) = y_i$, i = 1, ..., 4.

- 1. (cours) Rappeler l'écriture du polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à 3 sous sa forme de Newton. On représentera le tableau des différences divisées.
- 2. (cours) Comment se calcule le polynôme avec l'algorithme de Horner?
- 3. Calculer le polynôme d'interpolation avec les valeurs $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 1, 4, 9)$. Interprétez.

Exercice 3: interpolation de Hermite

1. Calculer les polynômes q_1, q_2, q_3 et q_4 de degré 3 qui satisfont les conditions suivantes :

$$q_1(0) = 1,$$
 $q_1(1) = 0,$ $q'_1(0) = 0,$ $q'_1(1) = 0,$
 $q_2(0) = 0,$ $q_2(1) = 1,$ $q'_2(0) = 0,$ $q'_2(1) = 0,$
 $q_3(0) = 0,$ $q_3(1) = 0,$ $q'_3(0) = 1,$ $q'_3(1) = 0,$
 $q_4(0) = 0,$ $q_4(1) = 0,$ $q'_4(0) = 0,$ $q'_4(1) = 1.$

Indication: profitez des racines des polynômes pour factoriser et exploitez les symétries possibles (déduire q_2 de q_1 et q_4 de q_3).

2. Soit p le polynôme tel que

$$p(x) = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x) + \alpha_4 q_4(x).$$

Quelles propriétés satisfait le polynôme p? Trouver le polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$p(0) = 1$$
, $p(1) = -2$, $p'(0) = 1$, $p'(1) = 2$.

3. Sans calculs supplémentaires, écrire le polynôme r de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$r(1) = -2$$
, $r(2) = 0$, $r'(1) = 2$, $r'(2) = 0$.

4. Soit f la fonction définie sur [0,2] telle que

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{sur } [0, 1[, \\ q(x) & \text{sur } [1, 2]. \end{cases}$$

Quelle est la plus grande régularité de f (quelle classe \mathcal{C}^k)?

Exercice 4 : interpolation de Lagrange sur triangle unité

On considère le triangle ABC avec A(0,0), B(1,0) et C(0,1) (triangle dit 'unité').

1. Calculer les polynômes $p_A(x,y)$, $p_B(x,y)$ et $p_C(x,y)$ de degré 1 en les variables x et y tels que

$$p_A(A) = 1,$$
 $p_A(B) = 0,$ $p_A(C) = 0,$
 $p_B(A) = 0,$ $p_B(B) = 1,$ $p_B(C) = 0,$
 $p_C(A) = 0,$ $p_C(B) = 0,$ $p_C(C) = 0.$

2. Trouver le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 en (x, y) tel que

$$p(A) = y_A, \quad p(B) = y_B, \quad p(C) = y_C.$$

Exercice 5 : interpolation de Lagrange sur triangle quelconque, coordonnées barycentriques

On considère maintenant un triangle ABC quelconque de sommets $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$. Pour considérer des points M(x, y) dans le triangle ABC, il est pratique de travailler en coordonnées dites barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $0 \le \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \le 1$ telles que

$$\begin{cases} \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C &= M(x, y), \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1. \end{cases}$$

On a un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. On voit que $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$, i = 1, 2, 3.

1. Montrer que

$$\lambda_1(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} x & x_B & x_C \\ y & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\det(MB, MC)}{\det(AB, AC)}.$$

- 2. Par permutation, trouver les expressions pour $\lambda_2(x,y)$ et $\lambda_3(x,y)$.
- 3. Vérifiez que le polynôme d'interpolation p(x,y) de degré inférieur ou égal à 1 tel que

$$p(A) = z_A, \quad p(B) = z_B, \quad p(C) = z_C$$

s'écrit

$$p(x,y) = z_A \lambda_1(x,y) + z_B \lambda_2(x,y) + z_C \lambda_3(x,y).$$