# MT09 A25 - Feuille de TD n° 10 Intégration numérique et formules de quadrature

### Exercice 1 : méthodes utilisant le polynôme d'interpolation

1. Calculer le polynôme de degré 1

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

qui interpole une fonction f aux points  $x_0 = -1$  et  $x_1 = 1$ . En déduire une formule d'intégration numérique J(f) qui approche  $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x) dx$ . Que retrouve-t-on?

2. Écrire le polynôme de degré inférieur ou égal à 2

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

qui interpole une fonction f aux points  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 1$ . En déduire une formule d'intégration numérique J(f) qui approche  $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x) dx$ . Que retrouve-t-on? La formule d'intégration est exacte jusqu'à quel degré polynomial?

# Exercice 2 : méthodes dites composées

1. Supposons que l'on possède une formule de quadrature

$$J(f) = \sum_{i=1}^{K} \omega_i f(x_i)$$

qui approche  $\int_{-1}^{1} f(x) dx$ . Par le changement de variable

$$x = \frac{a+b}{2} + u\frac{b-a}{2}, \qquad u \in [-1,1],$$

en déduire une formule qui approche  $\int_a^b f(x) \, dx$  pour  $a \neq b$  quelconques.

- 2. Sur un intervalle [a, b], on rappelle les premières formules de Newton-Cotes avec mesure de l'erreur :
  - (a) Formule des rectangles : J(f) = (b-a)f(a),  $E(f) = -\frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta)$ ,  $\eta \in ]a,b[$ ;
  - (b) Formule des trapèzes :  $J(f) = \frac{b-a}{2} \left( f(a) + f(b) \right), \quad E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \, f''(\eta).$

1

On définit une subdivision d'un intervalle  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  en N sous-intervalles  $[x_j, x_{j+1}]$  avec (N+1) points  $x_j = \alpha + jh, \ j = 0, ..., N$  avec  $h = \frac{\beta - \alpha}{N} \ (x_0 = \alpha, \ x_N = \beta)$ . Comme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) dx,$$

proposez une formule de quadrature I(f) en appliquant successivement la formule des rectangles et la formule des trapèzes à chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ .

3. En supposant que les dérivées k-ièmes de f sont bornées sur  $[\alpha, \beta]$ , trouver une majoration de l'erreur

$$E(f) = \left| J(f) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx \right|$$

en fonction de h.

### Exercice 3 : points de Gauss et polynômes orthogonaux

Soit  $\xi \in [-1,1]$ . On considère la formule de quadrature suivante :

$$J(f) = f(-\xi) + f(\xi).$$

où J(f) approche  $\int_{-1}^{1} f(x) dx$ .

- 1. Que vaut J(f) pour f fonction impaire?
- 2. Déterminer  $\xi$  de façon que la formule de quadrature soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
- 3. Sur  $L^2(-1,1)$ , espace des fonctions de carré intégrable sur (-1,1), on peut définir un produit scalaire  $(.,.): \forall f \in L^2(-1,1)$ ,

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x) dx,$$

L'espace est aussi doté de la norme  $||f|| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 dx}$ . À partir de la base canonique de polynômes  $(b_0,b_1,b_2)$ , c'est-à-dire  $b_0(x)=1$ ,  $b_1(x)=x$ ,  $b_2(x)=x^2$ , calculez une base orthonormée  $(q_0,q_1,q_2)$  de polynômes en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Indication : on doit trouver

$$q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad q_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}} (x^2 - \frac{1}{3}).$$

Quelles sont les racines de  $q_2$ ?

Commentaires : ce n'est pas par hasard si les racines de polynômes orthogonaux définissent de 'bons' points d'intégration (voir cours/poly). On les appelle points de Gauss-Legendre.

# Exercice 4 : formules de quadrature en dimension 2 sur un carré

On peut aussi définir des formules de quadrature pour les intégrales multiples. Soit f définie sur le carré  $[-1,1]^2$  et la formule d'intégration numérique

$$J(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

qui approche

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Vérifiez que la formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 en les variables x et y, c'est-à-dire les combinaisons linéaires de monômes 1, x, y,  $x^2$ , xy,  $y^2$ ,  $x^3$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$  et  $y^3$ . La formule est-elle exacte pour  $x^2y^2$ ,  $x^4$ ?