MT09 P24 - Feuille de TD n° 10
Intégration numérique

Exercice 1 : méthodes utilisant le polynôme d'interpolation

1. Écrire le polynôme de degré 1 qui interpole une fonction f aux points -1 et 1. En déduire une formule d'intégration numérique $I(f)$ qui approche $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Que retrouve-t-on ?
2. Écrire le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui interpole une fonction f aux points -1, 0 et 1. En déduire une formule d'intégration numérique $I(f)$ qui approche $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Que retrouve-t-on ? La formule d'intégration est exacte jusqu'à quel degré polynomial ?

Exercice 2 : méthodes composées

1. Supposons que l'on possède une formule de quadrature

$$I(f) = \sum_{i=1}^{K} \omega_i\, f(x_i)$$

qui approche $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Comment peut-on en déduire une formule qui approche

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

pour $a \neq b$ quelconques ? (penser au changement de variables).

2. Sur un intervalle $[a,b]$, on rappelle les premières formules de Newton-Cotes avec mesure de l'erreur :
   (a) Formule des rectangles :

$$I(f) = (b-a)f(a), \quad E(f) = -\frac{(b-a)^2}{2}\, f'(\eta),$$

   (b) Formule des trapèzes :

$$I(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right), \quad E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}\, f''(\eta),$$

pour un certain $\eta \in]a,b[$.
On définit une subdivision d'un intervalle $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ en N sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ avec $(N+1)$ points $x_j = \alpha + jh$, $j = 0, ..., N$ avec $h = \frac{\beta-\alpha}{N}$ ($x_0 = \alpha$, $x_N = \beta$). Comme

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + ... + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx,$$

proposez une formule de quadrature $I(f)$ en appliquant successivement la formule des rectangles et la formule des trapèzes à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$.

3. En supposant que les dérivées k-ièmes de f sont bornées sur $[\alpha, \beta]$, trouver une majoration de l'erreur
$$E(f) = \left| I(f) - \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \right|$$
en fonction de h.

Exercice 3 : points de Gauss et polynômes orthogonaux

Soit $\xi \in [-1, 1]$. On considère la formule de quadrature suivante :

$$I(f) = f(-\xi) + f(\xi).$$

où $I(f)$ approche $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$.

1. Que vaut $I(f)$ pour f fonction impaire ?
2. Déterminer ξ de façon que la formule de quadrature soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
3. Sur $L^2(-1, 1)$, espace des fonctions de carré intégrable sur $(-1, 1)$, on peut définir un produit scalaire $(.,.)$: $\forall f \in L^2(-1, 1)$,
$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\, dx,$$
L'espace est aussi doté de la norme $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-1}^1 [f(x)]^2\, dx}$. À partir de la base canonique de polynômes (b_0, b_1, b_2), c'est-à-dire $b_0(x) = 1$, $b_1(x) = x$, $b_2(x) = x^2$, calculez une base orthonormée (q_0, q_1, q_2) de polynômes en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Indication : on doit trouver
$$q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \quad q_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\, (x^2 - \frac{1}{3}).$$
Quelles sont les racines de q_2 ?

Commentaires : ce n'est pas par hasard si les racines de polynômes orthogonaux définissent de bons points d'intégration. On les appelle points de Gauss.

Exercice 4 : formules de quadrature en dimension 2 sur un carré

On peut aussi définir des formules de quadrature pour les intégrales multiples. Soit f définie sur le carré $[-1, 1]^2$ et la formule d'intégration numérique

$$I(f) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

qui approche
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y)\, dx\, dy.$$
Vérifiez que la formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3 en les variables x et y, c'est-à-dire les combinaisons linéaires de monômes 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2 et y^3. La formule est-elle exacte pour x^2y^2, x^4 ?