

TD MT12

1. CHAPITRE 5

Exercice 1. (Transformée de Fourier) Justifier que les fonctions suivantes sont dans $L^1(\mathbb{R})$ puis calculer leurs transformée de Fourier.

- (1) Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ avec a un réel strictement positif.
(2) Soit f_2 la fonction triangle définie par

$$f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (3) Soit f_3 la fonction exponentielle causale définie par

$$f_3(x) = H(x) e^{-ax}, \quad a > 0,$$

où H désigne la fonction de Heaviside.

- (4) Soit f_4 la fonction exponentielle causale définie par

$$f_4(x) = H(-x) e^{ax}, \quad a > 0.$$

- (5) Soit f_5 la fonction définie par

$$f_5(x) = \frac{x^k}{k!} e^{-ax} H(x), \quad k \geq 1, a > 0.$$

- (6) Soit f_6 la fonction définie par

$$f_6(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

- (7) Soit f_7 la fonction définie par

$$f_7(x) = \text{sign}(x) e^{-a|x|}, \quad a > 0,$$

où sign est la fonction signe donnée par

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- (8) Soit f_8 la fonction sinusoidale amortie et causale définie par

$$f_8(x) = \sin(2\pi x) e^{-ax} H(x), \quad a > 0.$$

(9) Soit f_9 la fonction gaussienne définie par

$$f_9(x) = e^{-\alpha x^2}, \quad \alpha > 0.$$

Ici pour calculer \widehat{f}_9 il faut dans un premier temps établir une équation différentielle d'ordre un vérifiée par f_9 . Par ailleurs, pour obtenir l'expression de $\widehat{f}_9(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{\alpha}}$ on admettra que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Exercice 2. (Utilisation de l'inverse de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$)
En utilisant la formule d'inversion de Fourier (en la justifiant) et l'exercice 1 calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

(1) Soit g_1 la fonction définie par

$$g_1(x) = \frac{1}{(a + 2i\pi x)^{k+1}}, \quad a > 0, k \geq 1.$$

(2) Soit g_2 la fonction définie par

$$g_2(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(3) Soit g_3 la fonction définie par

$$g_3(x) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}.$$

Exercice 3. (Convolution et transformée de Fourier) Le but de cet exercice est de manipuler le produit de convolution.

(1) Soit h_1 la fonction définie sur \mathbb{R} par $h_1(x) = (\sin * \mathbf{1}_{[-a,a]})(x)$ avec $a > 0$. Justifier que h_1 est bien définie sur \mathbb{R} et calculer explicitement h_1 .

(2) Soit $h_2 = f * g$ où f et g sont nulles respectivement hors de l'intervalle $[a, b]$ et hors de $[c, d]$. Justifier que h_2 est nulle hors de $[a + c, b + d]$. En déduire que si f et g sont causales (nulles sur \mathbb{R}_-) alors h_2 est causale.

(3) Soit h_3 la fonction définie sur \mathbb{R} comme le produit de convolution de deux fonctions exponentielles décroissantes causales, i.e.,

$$h_3(x) = \int_{\mathbb{R}} H(y) e^{-ay} H(x - y) e^{-b(x-y)} dy,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que h_3 est bien définie et calculer explicitement h_3 (on utilisera la question précédente).

(4) Soit h_4 la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$h_4(x) = \frac{1}{2\pi ab} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2b^2}} dy,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que h_4 est bien définie et calculer explicitement h_4 (utiliser le lien entre convolution et transformée de Fourier ainsi que l'exercice 1).

Exercice 4. (Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$)

- (1) Montrer que la convolution de deux fonctions ayant la même parité est paire.
- (2) Démontrer que la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse d'une fonction paire coïncident.
- (3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} comme le produit de convolution de deux fonctions sinus cardinal, i.e.,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi ay)}{\pi y} \frac{\sin(2\pi b(x-y))}{\pi(x-y)} dy,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que f est bien définie et calculer f explicitement en utilisant l'exercice 1 et la Proposition 25 du cours.