TD MT12

1. Chapitre 5

Exercice 1. (Transformée de Fourier) Justifier que les fonctions suivantes sont dans $L^1(\mathbb{R})$ puis calculer leurs transformée de Fourier.

(1) Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ avec a un réel strictement positif.

(2) Soit f_2 la fonction triangle définie par

$$f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Soit f_3 la fonction exponentielle causale définie par

$$f_3(x) = H(x)\, e^{-ax}, \quad a > 0,$$

où H désigne la fonction de Heaviside.

(4) Soit f_4 la fonction exponentielle causale définie par

$$f_4(x) = H(-x)\, e^{ax}, \quad a > 0.$$

(5) Soit f_5 la fonction définie par

$$f_5(x) = \frac{x^k}{k!}\, e^{-ax}\, H(x), \quad k \geq 1,\, a > 0.$$

(6) Soit f_6 la fonction définie par

$$f_6(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

(7) Soit f_7 la fonction définie par

$$f_7(x) = \operatorname{sign}(x) e^{-a|x|}, \quad a > 0,$$

où sign est la fonction signe donnée par

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(8) Soit f_8 la fonction sinusoïdale amortie et causale définie par

$$f_8(x) = \sin(2\pi x)\, e^{-ax} H(x), \quad a > 0.$$

Date: 23 décembre 2025.

(9) Soit f_9 la fonction gaussienne définie par

$$f_9(x) = e^{-\alpha x^2}, \quad \alpha > 0.$$

Ici pour calculer $\widehat{f_9}$ il faut dans un premier temps établir une équation différentielle d'ordre un vérifiée par f_9. Par ailleurs, pour obtenir l'expression de $\widehat{f_9}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\alpha}}$ on admettra que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Exercice 2. (Utilisation de l'inverse de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$) En utilisant la formule d'inversion de Fourier (en la justifiant) et l'exercice 1 calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

(1) Soit g_1 la fonction définie par

$$g_1(x) = \frac{1}{(a + 2i\pi x)^{k+1}}, \quad a > 0,\ k \geq 1.$$

(2) Soit g_2 la fonction définie par

$$g_2(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(3) Soit g_3 la fonction définie par

$$g_3(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 x^2}.$$

Exercice 3. (Convolution et transformée de Fourier) Le but de cet exercice est de manipuler le produit de convolution.

(1) Soit h_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_1(x) = (\sin * \mathbf{1}_{[-a,a]})(x)$ avec $a > 0$. Justifier que h_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ est calculer explicitement h_1.

(2) Soit $h_2 = f * g$ où f et g sont nulles respectivement hors de l'intervalle $[a, b]$ et hors de $[c, d]$. Justifier que h_2 est nulle hors de $[a + c, b + d]$. En déduire que si f et g sont causales (nulles sur $\mathbb{R}_-$) alors h_2 est causale.

(3) Soit h_3 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme le produit de convolution de deux fonctions exponentielles décroissantes causales, i.e.,

$$h_3(x) = \int_{\mathbb{R}} H(y) e^{-ay}\, H(x - y) e^{-b(x-y)}\, dy,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que h_3 est bien définie et calculer explicitement h_3 (on utilisera la question précédente).

(4) Soit h_4 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_4(x) = \frac{1}{2\pi\, ab} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2b^2}}\, dy,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que h_4 est bien définie et calculer explicitement h_4 (utiliser le lien entre convolution et transformée de Fourier ainsi que l'exercice 1).

Exercice 4. (Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$)

(1) Montrer que la convolution de deux fonctions ayant la même parité est paire.

(2) Démontrer que la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse d'une fonction paire coïncident.

(3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme le produit de convolution de deux fonctions sinus cardinal, i.e.,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi a y)}{\pi y} \frac{\sin(2\pi b(x-y))}{\pi(x-y)}\, dy,$$

avec a et $b > 0$. Justifier que f est bien définie et calculer f explicitement en utilisant l'exercice 1 et la Proposition 25 du cours.

Exercice 5. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

(1) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

(2) En déduire que le produit de convolution $(f \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)f(x-y)dy$ est bien défini.

(3) Calculer explicitement la fonction $f \star f$.

(4) Calculer la transformée de Fourier de f.

(5) En déduire la transformée de Fourier de $f \star f$.

(6) En déduire la transformée de Fourier de la fonction

$$g(x) = \frac{\sin^2(2\pi x)}{x^2}.$$