MT09 A25 - Feuille de TD n° 11
Équations différentielles ordinaires (EDO) et systèmes différentiels

Exercice 1 : modèle de croissance cellulaire

Des cellules vivantes sont mises en culture dans un milieu riche en nutriments. On souhaite décrire l'évolution au cours du temps t de la densité de cellules $\rho(t)$, c'est-à-dire le nombre moyen de cellules par unité de surface. La modélisation macroscopique donne une loi différentielle du type

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \sigma \frac{\rho(t)}{\rho_M}(\rho_M - \rho(t))$$

où σ est une constante (homogène à l'inverse d'un temps) et ρ_M est la densité maximale de cellules (les cellules occupent toute la place). On a affaire à une équation différentielle du premier ordre, non linéaire. On suppose que la densité ρ_0 au temps initial $t = 0$ est très petite mais strictement positive (quelques cellules par unité de surface) : $0 < \rho_0 \ll \rho_M$. On va chercher la solution du problème différentiel.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$F(\rho) = \frac{1}{\rho(\rho_M - \rho)}.$$
2. Montrer que que pout tout $t \geq 0$,
$$\rho(t) = \rho_M \frac{e^{\sigma t}}{\frac{\rho_M}{\rho_0} - 1 + e^{\sigma t}}.$$
3. Vérifiez que $\forall t \geq 0$, $\rho_0 \leq \rho(t) < \rho_M$, $\rho(0) = \rho_0$ et $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \rho_M$. Donner une idée de la représentation graphique de $t \mapsto \rho(t)$, $t \in [0, +\infty[$.
4. Calculer le temps caractéristique τ pour lequel $\rho(t)$ atteint $\rho_M/2$ et vérifier que τ dépend de σ.

Commentaire : la grandeur d'intérêt pour les biologistes/médecins est la vitesse de croissance cellulaire σ. À partir de mesures de la densité de cellules à différents instants, on essaie de trouver σ. On parle de problème 'inverse'.

Exercice 2 : dynamique du point en potentiel double-puits

Soit $a \geq 0$ et $\varphi(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = (x-1)^2\,(x+1)^2.$$

On considère le système différentiel

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t), \tag{1}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\varphi'(x(t)) - a\,v(t), \tag{2}$$

1. Calculez $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et faire une étude de fonction de φ.
2. Écrire le système dynamique sous la forme $\dfrac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))$ où l'on précisera $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{f}$.
3. On définit l'énergie du système comme
$$E = \frac{v^2}{2} + \varphi(x).$$
Montrez que $\dfrac{dE(t)}{dt} = -a\,[v(t)]^2 \leq 0$.
4. Calculez les états d'équilibre du système.
5. Les états d'équilibre sont-ils stables ou instables ?
6. Que se passe-t-il si $a = 0$?
7. Calculez le système linéarisé autour de chaque état d'équilibre.

Exercice 3 : Modèle proie-prédateur (système de Lotka-Volterra)

On introduit ici un modèle simplifié de dynamique proie-prédateur. On suppose ici que la population de 'prédateurs' en nombre q se nourrit exclusivement de 'proies'. Les proies en nombre p ont un taux de natalité important et ont des ressources permanentes en nourriture. Les prédateurs ont un taux de disparition par mort naturelle. Le système dynamique peut alors être modélisé comme suit :

$$\frac{dp(t)}{dt} = \alpha\, p(t) - \beta\, p(t)q(t), \tag{3}$$
$$\frac{dq(t)}{dt} = \delta\, p(t)q(t) - \gamma\, q(t) \tag{4}$$

avec $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$. Pour la donné initiale, on suppose $p(0) = p_0 > 0$, $q(0) = q_0 > 0$.

1. Quels sont les états d'équilibre du système dynamique ? Chaque état d'équilibre est-il linéairement stable, instable, centre ou foyer ?
2. Pour simplifier, on suppose **dans la suite** que $\alpha = \beta = \delta = 1$. Tracer succinctement le champ de vecteurs dans le quart de plan $\{(p, q),\ p, q > 0\}$.
3. Montrer que la grandeur $\eta(p(t), q(t))$, où
$$\eta(p, q) = p - \ln(p) + q - \ln(q)$$
est conservée au cours du temps t. Que vaut-elle ?
4. Soit A une matrice anti-symétrique, c'est-à-dire telle que $A^T = -A$. Montrez que les éléments diagonaux de A sont nuls. Montrez aussi que, pour tout $\boldsymbol{x}$,
$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0.$$
5. Pour le système proie-prédateur, montrez que
$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = pq\, A\, \nabla\eta(\boldsymbol{y}),$$
où $\boldsymbol{y} = (p, q)$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Retrouvez que $\dfrac{d\eta(\boldsymbol{y})}{dt} = 0$.