MT09 P24 - Feuille de TD n° 11
Équations différentielles ordinaires (EDO) et systèmes différentiels

Exercice 1 : modèle de croissance cellulaire

Des cellules vivantes sont mises en culture dans un milieu riche en nutriments. On souhaite décrire l'évolution au cours du temps t de la densité de cellules $\rho(t)$, c'est-à-dire le nombre moyen de cellules par unité de surface. La modélisation macroscopique donne une loi différentielle du type

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \sigma \frac{\rho(t)}{\rho_M}(\rho_M - \rho(t))$$

où σ est une constante (homogène à l'inverse d'un temps) et ρ_M est la densité maximale de cellules (les cellules occupent toute la place). On a affaire à une équation différentielle du premier ordre, non linéaire. On suppose que la densité ρ_0 au temps initial $t = 0$ est très petite mais strictement positive (quelques cellules par unité de surface) : $0 < \rho_0 \ll \rho_M$. On va chercher la solution du problème différentiel.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$F(\rho) = \frac{1}{\rho(\rho_M - \rho)}.$$
2. Montrer que que pout tout $t \geq 0$,
$$\rho(t) = \rho_M \, \frac{e^{\sigma t}}{\frac{\rho_M}{\rho_0} - 1 + e^{\sigma t}}.$$
3. Vérifiez que $\forall t \geq 0$, $\rho_0 \leq \rho(t) < \rho_M$, $\rho(0) = \rho_0$ et $\lim\limits_{t \to \infty} \rho(t) = \rho_M$. Donner une idée de la représentation graphique de $t \mapsto \rho(t)$, $t \in [0, +\infty[$.
4. Calculer le temps caractéristique τ pour lequel $\rho(t)$ atteint $\rho_M/2$ et vérifier que τ dépend de σ.

Commentaire : la grandeur d'intérêt pour les biologistes/médecins est la vitesse de croissance cellulaire σ. À partir de mesures de la densité de cellules à différents instants, on essaie de trouver σ. On parle de problème 'inverse', la résolution du problème différentiel étant le problème dit 'direct'.

Exercice 2 : Modèle proie-prédateur (système de Lotka-Volterra)

On introduit ici un modèle simplifié de dynamique proie-prédateur. On suppose ici que la population de 'prédateurs' en nombre q se nourrit exclusivement de 'proies'. Les proies en nombre p ont un taux de natalité important et ont des ressources permanentes en nourriture. Les prédateurs ont un taux de disparition par mort naturelle. Le système dynamique peut alors être modélisé comme suit :

$$\frac{dp(t)}{dt} = \alpha\, p(t) - \beta\, p(t)q(t), \tag{1}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \delta\, p(t)q(t) - \gamma\, q(t) \tag{2}$$

avec $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$. Pour la donné initiale, on suppose $p(0) = p_0 > 0$, $q(0) = q_0 > 0$.

1. Quels sont les états d'équilibre du système dynamique ? Chaque état d'équilibre est-il linéairement stable, instable, centre ou foyer ?
2. Pour simplifier, on suppose dans la suite que $\alpha = \beta = \delta = 1$. Tracer succinctement le champ de vecteurs dans le quart de plan $\{(p, q),\ p, q > 0\}$.
3. Montrer que la grandeur $\eta(p(t), q(t))$, où

$$\eta(p, q) = p - \ln(p) + q - \ln(q)$$

   est conservée au cours du temps t. Que vaut-elle ?

Exercice 3 : Système masse-ressort avec amortissement

Un objet ponctuel posé au sol est attaché à un ressort, fixé lui-même à un mur. La masse de l'objet est m et la raideur du ressort est $k > 0$. Si l'objet est mobile, il subit un frottement au sol proportionnel à sa vitesse avec un coefficient d'amortissement $a > 0$. Les lois de la cinématique et de la dynamique en hypothèse de petits déplacements s'écrivent

$$\frac{du}{dt} = v,$$

$$m\frac{dv}{dt} = -ku - av,$$

où $u(t)$ représente le déplacement et $v(t)$ la vitesse de l'objet. On suppose que $u(0) = u_0 \neq 0$ et $v(0) = 0$.

1. On note $\boldsymbol{x}(t) = (u(t), v(t))$. Écrire le système différentiel sous forme

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

   où l'on précisera $\boldsymbol{f}$.
2. Montrer que u satisfait l'équation différentielle scalaire du second ordre

$$\ddot{u} + \frac{a}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0.$$

3. Résoudre le problème différentiel. Indication : on écrira l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{a}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

   et l'on calculera le discriminant Δ. On traitera successivement les 3 cas $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ et $\Delta = 0$, et on précisera le type de régime correspondant.
4. Que se passe-t-il si $a = 0$?