MT09 A25 - Feuille de TD n° 12
Schémas numériques pour les équations différentielles

Exercice 1 : méthode des trapèzes

1. Écrire une méthode de résolution numérique de résolution de
$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$
en utilisant un pas de temps constant $h = t_{n+1} - t_n$ et la formule d'intégration numérique des trapèzes sur chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}[$, $t_n = nh$.
2. On considère le problème différentiel linéaire
$$y'(t) = -\lambda\, y(t), \quad y(0) = y_0$$
(avec $\lambda > 0$). Quelle est la solution exacte ? Que vaut $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$?
3. Appliquer le schéma numérique trouvé en première question à cet exemple. Exprimer z_n en fonction de z_0. Que se passe-t-il si le pas de temps h est choisi tel que $h \geq \dfrac{2}{\lambda}$?
4. Pour un instant T fixé, on choisit $h = \dfrac{T}{N}$. Donner l'expression z_N en fonction de y_0, λ, T, N. Calculer la limite de z_N quand N tend vers l'infini.
5. Dans cette question, h est fixé. Calculer la limite quand n tend vers l'infini et comparer à la valeur attendue.

Exercice 2 : schéma d'Euler implicite

On considère le problème différentiel vectoriel
$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0,$$
où $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ supposée différentiable.

1. Écrire le schéma d'Euler implicite reliant $\boldsymbol{z}_n$ à $\boldsymbol{z}_{n+1}$. Comment peut-on calculer $\boldsymbol{z}_{n+1}$? Écrire l'application $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ telle que $\boldsymbol{z}_{n+1}$ est solution de $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}_{n+1}) = \boldsymbol{0}$.
2. On suppose ici $p = 1$ (cas scalaire). Calculer φ' et écrire la méthode de Newton permettant de résoudre $\varphi(z_{n+1}) = 0$.
3. Pour $p > 1$, comment s'écrit la méthode de Newton ?
4. Quelle valeur vous paraît-elle appropriée à l'initialisation de la méthode de Newton ?
5. Écrire le schéma numérique correspondant à une seule itération de Newton de résolution de $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}_{n+1}) = 0$ par pas de temps. Comment peut-on réinterpréter ce schéma ?

Exercice 3 : ordre de schémas

1. Montrer que le schéma d'Euler explicite

$$z_{n+1} = z_n + h\, f(t_n, z_n)$$

   est d'ordre 1 et pas mieux.

2. Montrer que le schéma numérique suivant (issu de la formule du point milieu) :

$$z_{n+1} = z_n + h\, \phi(t_n, z_n, h)$$

   avec

$$\phi(t, z, h) = f\Big(t + \frac{h}{2},\, z + \frac{h}{2} f(t, z)\Big)$$

   est d'ordre 2.

   Indication : effectuer deux développements de Taylor différents au voisinage de $y(t_n + \frac{h}{2})$.

Exercice 4 : schéma multipas

On considère le schéma numérique (vu en cours) suivant :

$$z_{n+1} = z_n + h\left(\frac{3}{2}\, f(t_n, z_n) - \frac{1}{2}\, f(t_{n-1}, z_{n-1})\right).$$

1. Le schéma est-il consistant ?
2. Quel est l'ordre du schéma ?
3. Le schéma est-il conditionnellement linéairement stable ? Si oui, sous quelle condition sur le pas de temps h ?