MT09 A25 - Feuille de TD n° 13
Schémas numériques pour les EDO, schémas symplectiques

Exercice 1 : oscillateur harmonique, schémas d'Euler et trapèze

Soit $k > 0$, $m > 0$. On considère l'oscillateur harmonique

$$\dot{u} = v,$$
$$m\,\dot{v} = -k\,u$$

avec la donnée initiale $u(0) = u_0 \neq 0$, $v(0) = 0$. La solution exacte est donnée par

$$u(t) = u_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad v(t) = \dot{u}(t).$$

On introduit l'énergie E du système définie par

$$E = E(u, v) = \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ku^2/2) &= \quad kuv, \\ \frac{d}{dt}(mv^2/2) &= -kuv, \end{aligned}$$

et que $\frac{dE}{dt} = 0$, autrement dit que l'énergie du système est conservée au cours du temps.

2. Sur cet exemple, vérifiez que le schéma d'Euler explicite à pas constant s'écrit

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + h\,v_n, \\ v_{n+1} &= v_n - \frac{hk}{m}\,u_n. \end{aligned}$$

3. On définit une énergie 'discrète' E_n au temps $t_n = nh$ définie par

$$E_n = \frac{1}{2}ku_n^2 + \frac{1}{2}mv_n^2.$$

Montrer que

$$E_{n+1} = \left(1 + \frac{h^2k}{m}\right) E_n, \quad E_n = \left(1 + \frac{h^2k}{m}\right)^n E_0$$

Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$?

4. On note $\boldsymbol{x} = (u, v)^T$. Montrez que $E(u, v) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T D\boldsymbol{x}$ où $D = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$. On note $D^{\frac{1}{2}}$ tel que $(D^{\frac{1}{2}})^2 = D$. Vérifiez qu'on a aussi $E(u, v) = \frac{1}{2}\,\|D^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\|^2$.

5. Soit $\boldsymbol{x}_n = (u_n, v_n)^T$. Montrez que pour tout $M > 0$, il existe un indice n_0 tel que $\forall n > n_0$,

$$\|\boldsymbol{x}_n\| > M.$$

   Que peut-on en conclure ? On dit que le schéma d'Euler explicite n'est pas asymptotiquement stable en temps.
6. Écrire le schéma d'Euler totalement implicite. Montrer que pour ce schéma,

$$E_n = \left(1 - \frac{h^2 k}{m}\right)^n E_0.$$

   Que vaut $\lim_{n\to\infty} E_n$?
7. Toujours pour cet exemple, écrire le schéma semi-implicite issu de la formule des trapèzes. Montrer que dans ce cas

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n = E_0,$$

   autrement dit que l'énergie est conservée. On dit que ce schéma est symplectique.

Exercice 2 : schéma explicite à variables décalées

On travaille toujours sur le cas de l'oscillateur harmonique de l'exercice précédent. On propose d'analyser le schéma à variables décalées (appelé encore schéma de Verlet) suivant :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + h\, v_{n+1/2}, \\ v_{n+3/2} &= v_{n+1/2} - \frac{hk}{m}\, u_{n+1} \end{aligned}$$

où u_n est une approximation de $u(t_n)$, et $v_{n+1/2}$ une approximation de $v(t_n + \frac{h}{2})$. La condition initiale au niveau continu est toujours $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = 0$.

1. Que proposez-vous pour attribuer une valeur 'initiale' à $v_{1/2}$?
2. Montrer que le schéma est d'ordre 2.
3. Montrez les 2 égalités suivantes :

$$\begin{aligned} k\frac{(u_{n+1})^2}{2} - k\frac{(u_n)^2}{2} &= hk\,\frac{u_n + u_{n+1}}{2}\, v_{n+1/2}, \\ m\frac{(v_{n+3/2})^2}{2} - m\frac{(v_{n+1/2})^2}{2} &= -hk\, u_{n+1}\,\frac{v_{n+1/2} + v_{n+3/2}}{2}. \end{aligned}$$

4. On ne peut plus vraiment définir d'énergie discrète à un temps donné puisque les variables de déplacement et de vitesse sont décalées. Néanmoins, en sommant les expressions ci-dessus entre $n = 0$ et $n = N$, montrez que, $\forall N \geq 0$,

$$k\frac{(u_{N+1})^2}{2} + m\frac{(v_{N+3/2})^2}{2} + \frac{kh}{2} u_{N+1}\, v_{N+3/2} = k\frac{(u_0)^2}{2} + m\frac{(v_{1/2})^2}{2} + \frac{kh}{2} u_0\, v_{1/2}.$$

   Commentaire : on vient de trouver un hamiltonien discret

$$H_n(h) = k\frac{(u_n)^2}{2} + m\frac{(v_{n+1/2})^2}{2} + \frac{kh}{2} u_n\, v_{n+1/2},$$

   grandeur conservée au cours du temps.