MT09 – TD 13

Ex 1

1. $\frac{d}{dt}\left(k\frac{u^2}{2}\right) = ku\frac{du}{dt} = kuv$

$\frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2}\right) = mv\frac{dv}{dt} = -kuv$ $\rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

2. $\tilde{z}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ $\frac{d\tilde{y}}{dt} = \begin{pmatrix} v \\ -k/m\, u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$

$\tilde{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Euler explicite : $\tilde{z}_{n+1} = \tilde{z}_n + h\, f(t_n, z_n)$

$\iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} v_n \\ -\frac{k}{m}u_n \end{pmatrix}$ OK.

3. On définit $E_n = \frac{1}{2}k u_n^2 + \frac{1}{2}m v_n^2$

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = h v_n \iff \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.(u_{n+1} - u_n) = h\frac{u_n + u_{n+1}}{2}v_n \\ v_{n+1} - v_n = -\frac{hk}{m}u_n \iff \frac{v_n + v_{n+1}}{2}.(v_{n+1} - v_n) = -\frac{hk}{m}\frac{v_n + v_{n+1}}{2}u_n. \end{cases}$$

Mais on a aussi $\frac{u_n + u_{n+1}}{2} = \frac{u_n + u_n}{2} + \frac{h v_n}{2} = u_n + \frac{h v_n}{2}$

et $\frac{v_n + v_{n+1}}{2} = v_n - \frac{hk}{2m}u_n$

$\Rightarrow \frac{u_{n+1}^2}{2} - \frac{u_n^2}{2} = h\left(u_n + \frac{h v_n}{2}\right)v_n = h u_n v_n + \frac{h^2 v_n^2}{2}$

$\rightarrow \underline{\frac{1}{2}k u_{n+1}^2 - \frac{1}{2}k u_n^2 = hk u_n v_n + \frac{1}{2}h^2 k v_n^2}$ (1)

et

$\frac{v_{n+1}^2}{2} - \frac{v_n^2}{2} = -\frac{hk}{m}\left(v_n - \frac{hk}{2m}u_n\right)u_n$

$\rightarrow \underline{\frac{1}{2}m v_{n+1}^2 - \frac{1}{2}m v_n^2 = -hk v_n u_n + \frac{h^2k^2}{2m}u_n^2}$ (2)

En sommant (1) et (2) :

$E_{n+1} - E_n = \frac{1}{2}h^2 k v_n^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2k^2}{2m^2}\overset{u_n^2}{\downarrow} = \frac{h^2 k}{m}\left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}k u_n^2\right)$

$= \frac{h^2 k}{m}E_n \Longrightarrow E_{n+1} = \left(1 + \frac{h^2 k}{m}\right)E_n.$

Donc $E_n = \left(1 + \frac{h^2 k}{m}\right)^n E_0 \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

4 – $\tilde{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $E(u,v) = \frac{1}{2} k u^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (u \ v) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\longrightarrow E = \frac{1}{2} x^T D x.$

On pose $D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{m} \end{pmatrix} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \langle x, D x \rangle = \frac{1}{2} \langle x, D^{1/2} D^{1/2} x \rangle$

$$= \frac{1}{2} \langle D^{1/2} x, D^{1/2} x \rangle$$

$$= \frac{\| D^{1/2} x \|^2}{2}.$$

5 – On pose $x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. $E_n = \frac{1}{2} \| D^{1/2} \tilde{x}_n \|^2$

On sait que : $E_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \quad E_n \geqslant M.$

$\Longleftrightarrow \quad M \leqslant \frac{1}{2} \| D^{1/2} x_n \|^2$. Mais $\| D^{1/2} x_n \| \leqslant ||| D^{1/2} ||| . \| x_n \|$

donc $\quad M \leqslant \frac{1}{2} ||| D^{1/2} |||^2 . \| x_n \|^2$

$$\Rightarrow \quad \| x_n \| \geqslant \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2} \| D^{1/2} \|} := M'.$$

$\Rightarrow$ Le couple déplacement – vitesse "part à l'infini". Pathologique

$\Rightarrow$ schéma asymptotiquement instable.

6 – De la m̄, on peut montrer pour le schéma d'Euler implicite

que

$E_{n+1} = \left(1 - \frac{h^2 k}{m}\right) E_n \Rightarrow E_n = \left(1 - \frac{h^2 k}{m}\right)^n E_0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$

Schéma dissipatif – ne conserve pas l'énergie non plus.

7 – Avec formule des trapèzes :

$$\tilde{z}_{n+1} = \tilde{z}_n + \frac{h}{2} \left\{ f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1}) \right\}.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left\{ \begin{matrix} v_n + v_{n+1} \\ -\frac{k}{m} u_n - \frac{k}{m} u_{n+1} \end{matrix} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\,(v_n + v_{n+1}) \\ m(v_{n+1} - v_n) = -\frac{hk}{2}\,(u_n + u_{n+1}) \end{cases}$$

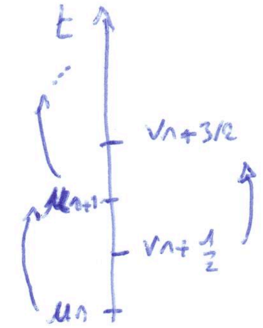
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\,(u_{n+1} - u_n)\cdot \frac{u_n + u_{n+1}}{2} = \frac{hk}{2}\,(v_n + v_{n+1})\,\frac{(u_n + u_{n+1})}{2} \\ m\,(v_{n+1} - v_n)\cdot \frac{v_n + v_{n+1}}{2} = -\frac{hk}{2}\,(u_n + u_{n+1})\,\frac{v_n + v_{n+1}}{2} \end{cases}$$

$$E_{n+1} - E_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_{n+1} = E_n}$$

L'énergie est préservée au niveau discret.

$\boxed{\text{Ex 2}}$ Schéma de Verlet : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, v_{n+\frac{1}{2}} \\ v_{n+3/2} = v_{n+1/2} - \frac{hk}{m}\, u_{n+1} \end{cases}$



1- On peut utiliser par exemple le schéma d'Euler explicite :

$$v_{1/2} = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{v_0} - \frac{h}{2}\,\frac{k}{m}\,u_0$$

2- $\tau^1_{n+1}(h) = u(t_{n+1}) - u(t_n) + h\, v(t_{n+1/2})$ mais $\dot{v} = \dot{u}$

$$= u(t_{n+1}) - u(t_n) + h\, u'(t_{n+\frac{1}{2}})$$

$$= \Big(\cancel{u(t_{n+\frac{1}{2}})} + \frac{h}{2} u'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \cancel{\frac{h^2}{2} u''(t_{n+\frac{1}{2}})} + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi_1)\Big)$$

$$- \Big(\cancel{u(t_{n+\frac{1}{2}})} - \frac{h}{2} u'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \cancel{\frac{h^2}{2} u''(t_{n+\frac{1}{2}})} + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi_2)\Big) + h\, u'(t_{n+\frac{1}{2}})$$

$$= h^3/6\,\big(u^{(3)}(\xi_1) + u^{(3)}(\xi_2)\big).$$

Faire pareil pour $\tau^2_{n+1}(h) = v(t_{n+3/2}) - v(t_{n+1/2}) - \frac{hk}{m}\,u(t_{n+1})$.

...

3.

$$u_{n+1} - u_n = h\, v_{n+1/2}$$

$$\Rightarrow k\,(u_{n+1} - u_n)\frac{(u_n + u_{n+1})}{2} = k\frac{(u_{n+1})^2}{2} - k\frac{u_n^2}{2} = kh\,\frac{u_n + u_{n+1}}{2}\cdot v_{n+1/2}$$

De m̄,

$$m\,\frac{(v_{n+3/2})^2}{2} - m\,\frac{(v_{n+1/2})^2}{2} = -hk\,\frac{v_{n+1/2} + v_{n+3/2}}{2}\cdot u_{n+1}$$

On somme toutes les expressions précédentes pour $n=0$ à N :

$$\sum_{n=0}^{N} \left\{ k \frac{u_{n+1}^2}{2} - k \frac{u_n^2}{2} \right\} = \sum_{n=0}^{N} \frac{hk}{2} \cdot \left\{ u_n v_{n+\frac{1}{2}} + u_{n+1} v_{n+\frac{1}{2}} \right\},$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left\{ m \frac{v_{n+3/2}^2}{2} - m \frac{(v_{n+1/2})^2}{2} \right\} = -\sum_{n=0}^{N} \frac{hk}{2} \cdot \left[u_{n+1} v_{n+\frac{1}{2}} + u_{n+1} v_{n+\frac{3}{2}} \right\}$$

On somme : il y a annihilation de plusieurs termes :

$$k \frac{u_{N+1}^2}{2} - k \frac{u_0^2}{2} + m \frac{v_{N+3/2}^2}{2} - m \frac{v_{1/2}^2}{2}$$

$$= -\frac{hk}{2} u_{N+1} v_{N+\frac{3}{2}} + \frac{hk}{2} u_0 v_{1/2}$$

Soit

$$k \frac{u_{N+1}^2}{2} + m \frac{v_{N+3/2}^2}{2} + \frac{hk}{2} u_{N+1} v_{N+3/2}$$

$$= k \frac{u_0^2}{2} + m \frac{v_{1/2}^2}{2} + \frac{hk}{2} u_0 v_{1/2}$$

Il apparaît un Hamiltonien discret :

$$E_n^h = \frac{1}{2} k u_n^2 + \frac{1}{2} m v_{n+\frac{1}{2}}^2 + \frac{hk}{2} u_n v_{n+\frac{1}{2}}$$

et on a montré

$$\boxed{E_n^h = E_0^h \quad \forall n \in \mathbb{N}}.$$

Une grandeur, consistante avec l'énergie totale, est conservée.