MT09-A2023 – Examen final – Questions de cours

Durée : **30 min**. *Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé*

NOM PRÉNOM :	Place n° :

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !
IL FAUT PROUVER LES RÉSULTATS AVEC SOIN!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2,5 points)*

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1. On considère $Q = I_n - 2uu^T$ la transformation de Householder.

1. Montrer que $Q^T = Q$ et $Q^T Q = I_n$.
2. On se donne $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\hat{x}\|_2 = 1$ et $e = (1, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$. On pose $u = (\hat{x} - e)/\|\hat{x} - e\|_2$. Calculer $\|\hat{x} - e\|_2^2$, et ensuite $(u, \hat{x})u$ $(= (u^T \hat{x})u)$. En déduire que $Q\hat{x} = e$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ de norme quelconque non nulle. Donner l'expression de la transformation de Householder qui donne $Qx = \|x\|_2 e$.
4. Déterminer Q pour $x = (1, 0, -1)^T \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la famille de réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ strictement croissante (c'est-à-dire que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $x_i < x_{i+1}$). On note $(\mathcal{L}_i)_{0 \leq i \leq n}$ les polynôme d'interpolation de Lagrange, qui forment une base de l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré $\leq n$.

1. Établir que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note $P \in \mathcal{P}_n$ son polynôme d'interpolation aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$. Montrer que
$$f(x) - P(x) = \sum_{i=0}^{n} (f(x) - f(x_i))\mathcal{L}_i(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
3. On considère deux polynômes Q et R dans $\mathcal{P}_{n-1}$ (de degré $\leq n-1$). On suppose que Q interpole f au points $(x_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ et R aux points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Vérifier que
$$P(x) = Q(x) - \frac{x - x_0}{x_n - x_0}(Q(x) - R(x)), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

On cherche à calculer numériquement une solution x^* de l'équation $x^* = 2 + \ln x^*$. On utilise la méthode de point fixe, qui partant d'une valeur initiale x_0 calcule la suite $x_{n+1} = 2 + \ln x_n$.

1. Énoncer le théorème du point fixe.
2. Montrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a $2 + \ln(x) \in [2, +\infty[$.
3. Montrer que si $x_0 \in [2, +\infty[$, la suite converge.

MT09-A2023- Examen final
Durée : **1h30**.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *6 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 6 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soient f et g deux fonctions 2 fois dérivables. On suppose de plus que g ne s'annule pas. On se donne a, b et c, trois réels distincts.

1. Calculer la limite de $f[a, b]$ lorsque b tend vers a.
2. (a) Écrire le développement de Taylor–Young de $f(a + h)$, quand $h \to 0$.
   (b) On pose $b = a + h$ et $c = a + k$, en supposant que $h \neq$k. En utilisant la question 2a, calculer
   $$\lim_{h\to 0, k\to 0} f[b, a, c].$$
   (c) Déduire $\lim_{h\to 0, k\to 0} f[a, b, c]$.
3. Établir la relation des différences divisées
   $$(fg)[a, b] = f[a]g[a, b] + f[a, b]g[b].$$
   Retrouver en vous aidant de la question 1, la formule de Leibnitz (connue) donnant $(fg)'$.
4. Démontrer la formule
   $$(fg)[a, b, c] = f[a]g[a, b, c] + f[a, b]g[b, c] + f[a, b, c]g[c]. \tag{1}$$
5. Retrouver la formule de de Leibnitz sur la dérivée seconde $(fg)''$ à partir de la formule (1) et de la question 2b.
6. Prouver que $\left(\frac{1}{g}\right)[a, b] = -\frac{g[a, b]}{g[a]g[b]}$. En déduire l'expression de $\left(\frac{f}{g}\right)[a, b]$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 10 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les questions 3) et 4) sont partiellement indépendantes des précédentes. La question de programmation en Scilab 5) ne dépend que de la question 4).

Soient deux réels t_0 et $T > 0$ et un entier $N > 0$. On introduit le pas $h = T/N$ et les points $t_n = t_0 + nh$ pour $n = 0, \ldots, N$.

1. Soit y une fonction de classe C^1 de $[t_0, t_0 + T]$ dans $\mathbb{R}$. On notera $y_n = y(t_n)$ la valeur de y en t_n, pour $n = 0, \ldots, N$. On appelle p_y le polynôme interpolant la fonction y aux points t_{n+1}, t_n, t_{n-1}.
   (a) Écrire p_y dans la base de Newton associée à t_{n+1}, t_n, t_{n-1} (dans cet ordre).
   (b) Calculer $p_y'(t_{n+1})$ en fonction de y_{n+1}, y_n, y_{n-1} et de h uniquement.
2. Soit f une fonction de classe C^1 : $(t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre numériquement l'équation différentielle suivante :
   $$\text{trouver } y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}), \text{ telle que } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$
   Pour cela, on va approcher $y'(t_{n+1})$ par $p_y'(t_{n+1})$.

(a) Écrire la relation $p_y'(t_{n+1}) \approx y'(t_{n+1})$ et en déduire un schéma du type :

$$z_{n+1} = \alpha_0 z_n + \alpha_1 z_{n-1} + h\beta f(t_{n+1}, z_{n+1}), \tag{3}$$

pour résoudre le problème (2). Déterminer les coefficients α_0, α_1 et β.

(b) Ce schéma est-il implicite ou explicite? Est-il à un pas ou multi-pas? Expliquer comment déterminer z_1.

3. On cherche à calculer l'ordre du schéma (3), pour des valeurs α_0, α_1 et β quelconques. On suppose que y est de classe au moins C^4.

   (a) Écrire un développement de Taylor de $y(t_{n+1})$ autour de t_n à l'ordre 3 en h.

   (b) Écrire un développement limité de $y(t_{n-1})$ autour de t_n à l'ordre 3 en h.

   (c) Écrire un développement limité de $y'(t_{n+1})$ autour de t_n à l'ordre 2 en h.

   (d) Calculer l'erreur de troncature locale et en déduire des relations entre α_0, α_1 et β pour que le schéma (3) soit au moins d'ordre 2. Les valeurs trouvées à la question 2a) conviennent-elles?

4. Soit p un entier > 0. On suppose dorénavant que la fonction f de classe C^2 est vectorielle : $(t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}^p$. On cherche à résoudre l'équation non-linéaire

$$\text{trouver } x^\star \in \mathbb{R}^p, \text{ tel que } x^\star = \alpha_0 z_n + \alpha_1 z_{n-1} + h\beta f(t_{n+1}, x^\star). \tag{4}$$

   (a) On suppose que f est uniformément Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante $L \geq 0$ telle que

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\|, \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ \forall y, z \in \mathbb{R}^p.$$

      i. Écrire le problème (4) sous la forme d'un problème de point fixe, qu'on notera $x^\star = \psi(x^\star)$.

      ii. Déterminer une condition suffisante sur $h > 0$ pour que ce problème admette une unique solution.

   (b) On utilise dorénavant la méthode de Newton.

      i. Reformuler ce problème (4) en une équation $G(x) = 0$: déterminer G.

      ii. Calculer la matrice jacobienne $DG(x)$ en fonction des dérivées partielles de f.

   (c) **Application :** Soit ξ, k, u_0 et v_0 des réels fixés. Soit l'équation différentielle :

$$\text{trouver } u \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}), \text{ telle que } \begin{cases} u''(t) = \xi u'(t) + k u^2(t) \ \forall t \in [t_0, t_0 + T], \\ u(t_0) = u_0, \ u'(t_0) = v_0. \end{cases} \tag{5}$$

      i. Mettre cette équation différentielle (5) sous forme d'une équation différentielle du type :

$$\text{trouver } y \text{ telle que } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

      Expliciter la fonction f de cette équation différentielle, en précisant bien les espaces de départ et d'arrivée.

      ii. Calculer G et sa matrice jacobienne $DG(x)$ dans ce cas.

5. **Programmation du schéma :** On suppose toujours que f est une fonction vectorielle : $f : (t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}^p$, pour $p > 0$.

   (a) Écrire une fonction scilab `[X,k] = newtonSchema(X0, tol, Niter, h, t, Zn, Znm1, f, dfdy)` implémentant la méthode de Newton pour la résolution du système d'équations non-linéaires $G(x) = 0$, où la fonction G est définie à la question 4b).

   Expliquer rapidement quel rôle jouent les arguments `f` et `dfdy`. Détailler en particulier les dimensions de leurs arguments d'entrée et de sortie.

   (b) Écrire les fonctions scilab `ma_fun` et `ma_dfundy`, qui seront appelées par `newtonSchema` quand G est donnée à la question 4c).

   (c) Écrire une fonction scilab `Y = schema(y0, y1, t0, T, N, f, dfdy)` implémentant le schéma (3).

   Décrire comment vous sauvegardez la solution. Quel point initial `X0` choisissez-vous dans l'appel à `newtonSchema` à chaque pas de temps?