MT12 - P2024 - Examen médian

Durée 1h30 – **Les documents et machines à calculer sont interdits**

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème : 6 points*)(Questions de cours)

1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée pour tout x et $y \in E$. Précisez également sous quelle condition sur x et y il y a égalité.
2. Soit f une fonction continue par morceaux et a-périodique. On note f_N la somme partielle d'ordre $N \geq 1$ de la série de Fourier de f, i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e_n(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f) \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) + b_n(f) \sin\left(2\pi n \frac{t}{a}\right)\right),$$
Donner la définition des coefficients $a_0(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction des $(c_n(f))_{-N \leq n \leq N}$. Par ailleurs, démontrer les formules suivantes :
$$a_0(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t)\, dt, \quad a_n(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) dt.$$
3. Soit f une fonction continue par morceaux et a-périodique (pour $a > 0$). Montrer que si f est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 (*barème : 6 points*)(Exercice de synthèse)

Soit f la fonction 2π-périodique avec
$$f(t) = (t - \pi)^2 \quad \text{si } t \in [0, 2\pi[.$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
3. Est-ce que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$?
4. Est-ce que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$?
5. Justifier les relations
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$
6. Déterminer la valeur de la série $\sum \frac{1}{n^4}$.

Tournez la page

Exercice 3 (*barème : 8 points*)(Polynômes de Legendre)

Dans cet exercice on considère H l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle_H = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt, \qquad f,g\in H,$$

et on note $\|\cdot\|_H$ la norme associée. On considère également les polynômes de Legendre donnés, pour tout $n\geq 1$, par la formule de récurrence

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x), \quad \text{et } P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ est un produit scalaire sur H et donner la définition de $\|\cdot\|_H$.
2. Calculer P_2 et montrer que la famille (P_0,P_1,P_2) est orthogonale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$.
3. Dans la suite on **admet** que pour tout n et $m\in\mathbb{N}$ on a

$$\langle P_n,P_m\rangle_H = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{si } n=m,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

   et on note H_N le sous-espace vectoriel de H avec $H_N = \mathrm{Vect}\langle P_0,\dots,P_N\rangle$ $(N\geq 1)$. On munit H_N du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$.

   (a) Montrer que $\dim(H_N) = N+1$. Démontrer également que pour tout $P=\sum_{k=0}^{N} a_k P_k \in H_N$, où $a_k\in\mathbb{R}$ est le k-ième coefficient de P, on a

$$\|P\|_H^2 = 2\sum_{k=0}^{N}\frac{|a_k|^2}{2k+1}.$$

4. Dans la suite, pour $f\in H$, on cherche à construire un polynôme de meilleure approximation de f dans H_N, i.e., on cherche $P\in H_N$ vérifiant

$$\|f-P\|_H = \min\{\|f-Q\|_H \,:\, Q\in H_N\}.$$

   Soit alors $P=\sum_{k=0}^{N} a_k P_k$, avec $a_k\in\mathbb{R}$, un polynôme quelconque de H_N.

   (a) Montrer que

$$\|f-P\|_H^2 = \|f\|_H^2 + \sum_{k=0}^{N}\|P_k\|_H^2\,|a_k|^2 - 2\sum_{k=0}^{N} a_k\langle f,P_k\rangle_H.$$

   (b) Pour tout $k=0,\dots,N$, on introduit les coefficients $\ell_k(f) = \frac{\langle f,P_k\rangle_H}{\|P_k\|_H^2}$. En déduire que

$$\|f-P\|_H^2 = \|f\|_H^2 + \sum_{k=0}^{N}\|P_k\|_H^2\,|a_k-\ell_k(f)|^2 - \sum_{k=0}^{N}\|P_k\|_H^2\,|\ell_k(f)|^2.$$

   (c) En déduire que le polynôme de meilleure approximation de f dans H_N est donné par

$$f_N = \sum_{k=0}^{N}\ell_k(f)\,P_k.$$

   (d) Ce polynôme est-il unique ? Si oui, le justifier.