MT12 - P2024 - Examen final

Durée 2h00 – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème : 6 points*)(Questions de cours)

1. Soit $N \geqslant 2$, on note $S_N = \overline{\Omega}_N/N$ la matrice représentant dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$ l'application de transformée de Fourier discrète. Rappeler la définition des coefficients de la matrice Ω_N. Calculer la transformée de Fourier discrète X du vecteur $x = (1, -1, 2, -2)^\top \in \mathbb{C}^4$ (on présentera les coordonnées de X sous forme algébrique).
2. Donner la définition de l'espace $L^1(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer ensuite que si $\alpha > 1$ alors la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ appartient à $L^1(1, +\infty)$. Cette fonction appartient-elle à $L^1(0, 1)$? (à justifier)
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, donner la définition de la transformée de Fourier de f. Soit $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, démontrer la formule suivante

$$\mathcal{F}\{f(cx)\} = \frac{1}{|c|}\,\widehat{f}\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

En déduire que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f}$ est également paire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (*barème : 6 points*)(Transformée de Fourier)

1. Soit f_1 la fonction définie par

$$f_1(x) = H(x)e^{-2\pi x} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

où H désigne la fonction de Heaviside.

(a) Montrer que $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Calculer $\widehat{f_1}$ la transformée de Fourier de f_1

2. Soit f_2 la fonction définie par

$$f_2(x) = H(-x)e^{2\pi x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Calculer $\widehat{f_2}$ la transformée de Fourier de f_2.

3. Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \exp\left(-2\pi\,|x|\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Calculer $\widehat{g}$ la transformée de Fourier de g.

4. Soit $n \geqslant 1$ fixé, on définit la fonction g_n par la relation $g_n(x) = g(x/n)$

(a) Montrer que $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|g_n(x)| \leqslant 1$.

(b) Montrer que

$$\widehat{g}_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{n}{1 + n^2\xi^2} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

(c) Montrer que $\|\widehat{g}_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}_n(\xi)|\,d\xi = 1$.

Exercice 3 (*barème : 8 points*)(Formule d'inversion de la transformée de Fourier)

Dans ce problème on propose de démonter, sous des hypothèses fortes, la formule d'inversion de la transformée de Fourier. Autrement dit, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction continue et bornée avec $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors on veut démontrer la formule suivante :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi\xi t}\, d\xi = \overline{\mathcal{F}}\{\widehat{f}(\xi)\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dans la suite du problème on notera $M > 0$ une constante telle que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on **admet** que pour deux fonctions quelconques h et r de $L^1(\mathbb{R})$, si $\widehat{h}\, r \in L^1(\mathbb{R})$ et $h\,\widehat{r} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\xi)\, r(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \widehat{r}(x)\, dx. \tag{2}$$

Dans la suite du problème on pourra utiliser des résultats démontrer dans l'exercice 2 et on considèrera un $t \in \mathbb{R}$ **quelconque fixé**.

1. Pour $n \geqslant 1$, on considère la fonction g_n étudiée dans l'exercice 2 avec $g_n : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \exp\left(-\frac{2\pi}{n}|\xi|\right)$.
   (a) Exprimer le terme $\mathcal{F}\{g_n(\xi)\, e^{2i\pi t\xi}\} = \int_{\mathbb{R}} g_n(\xi)\, e^{2i\pi t\xi} e^{-2i\pi x\xi} d\xi$ en fonction de $\widehat{g}_n(x-t)$.
   (b) Justifier que $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)\, g_n(\xi)\, e^{2i\pi t\,\xi} \in L^1(\mathbb{R})$.
   (c) Etablir l'inégalité suivante

   $$\int_{\mathbb{R}} \left| f(x)\, \mathcal{F}\{g_n(\xi)\, e^{2i\pi t\xi}\} \right| dx \leqslant M,$$

   et en déduire que $x \mapsto f(x)\, \mathcal{F}\{g_n(\xi)\, e^{2i\pi t\xi}\} \in L^1(\mathbb{R})$.
   (d) Déduire des questions précédentes et de la formule (2) la relation suivante

   $$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, g_n(\xi) e^{2i\pi t\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}_n(x-t)\, dx. \tag{3}$$

2. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g_n(\xi) e^{2i\pi t\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi t\xi}\, d\xi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. À l'aide de la valeur de $\|\widehat{g}_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$ calculée à l'exercice 2 et d'un changement de variable établir l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}_n(x-t)\, dx - f(t) = \int_{\mathbb{R}} (f(x+t) - f(t))\, \widehat{g}_n(x)\, dx.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. f étant continue en t alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout s et $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|s-y| \leqslant \eta$ alors $|f(s) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. On considère alors la décomposition suivante

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x+t) - f(t))\, \widehat{g}_n(x)\, dx = \int_{|x|\leqslant\eta} (f(x+t) - f(t))\, \widehat{g}_n(x)\, dx + \int_{|x|>\eta} (f(x+t) - f(t))\, \widehat{g}_n(x)\, dx.$$

   (a) Montrer que $\left|\int_{|x|\leqslant\eta} (f(x+t) - f(t))\, \widehat{g}_n(x)\, dx\right| \leqslant \varepsilon$.
   (b) Etablir que

   $$\left| f(t) \int_{|x|>\eta} \widehat{g}_n(x)\, dx \right| = |f(t)| \left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan(n\,\eta)\right) \quad \text{et} \quad \left| \int_{|x|>\eta} f(x+t)\, \widehat{g}_n(x)\, dx \right| \leqslant \widehat{g}_n(\eta)\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

5. [Bonus] Conclure de toutes les questions précédentes que l'égalité (1) est vérifiée.