Université de Technologie de Compiègne

MT12 - Novembre 2024- Médian
Durée : 1h30.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (3 points)

1. Soit f une fonction R-intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$
2. Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$
3. Calculer en utilisant les questions précédentes l'intégrale suivante :
$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

Exercice 2. (4 points) Soient f une fonction R-intégrable définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ et N un entier pair non-nul vérifiant $N = 2M$.

1. La fonction f est-elle bornée sur l'intervalle $[a, b]$? Justifier.
2. On considère les points
$$y_k = a + \frac{2k}{N}(b-a) \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, M,$$
$$z_k = a + \frac{2k+1}{N}(b-a) \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, M-1,$$
et note
$$A_M = \frac{b-a}{M}\sum_{k=0}^{M} f(y_k), \quad B_M = \frac{b-a}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(z_k).$$
Quelles sont les valeurs de $\lim\limits_{M\to+\infty} A_M$ et $\lim\limits_{M\to+\infty} B_M$? Justifier.
3. On considère les points
$$x_k = a + \frac{k}{N}(b-a) \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, N,$$
et note
$$C_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k f(x_k).$$
Exprimer C_N en fonction de A_M et B_M.
4. Déterminer en utilisant les questions précédentes $\lim\limits_{N\to+\infty} C_N$.

Exercice 3. (4 points) Soit f une fonction a-périodique appartenant à l'espace $C^1([0, a], \mathbb{C})$.

1. Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$.
2. Monter que si $c_0(f) = 0$ alors
$$\int_0^a |f(x)|^2 dx \leq \frac{a^2}{4\pi^2}\int_0^a |f'(x)|^2 dx.$$
Indication : Penser à utiliser l'égalité de Parseval.
3. On note $g_\alpha(x) = f(x+\alpha)$ pour $\alpha \in [0, 2\pi]$. Exprimer $c_n(g_\alpha)$ en fonction de $c_n(f)$.
4. On suppose en plus que f est une fonction non-nulle, vérifiant l'égalité suivante :
$$f'(x) = g_\alpha(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, a].$$
Trouver une valeur admissible de α.

Tournez la page S.V.P

Exercice 4. (9 points) Soient $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ et f la fonction 2-périodique définie par

$$f(x) = e^{\beta|x|} \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1[.$$

1. Représenter f graphiquement lorsque $\beta = 1$.
2. Exprimer pour tout $z \in \mathbb{R}$ la fonction $\cos(z)$ en fonction de e^{iz} et e^{-iz}.
3. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
4. Y-a-t-il convergence ponctuelle de la somme partielle des séries de Fourier vers f sur $\mathbb{R}$? Justifier.
5. Y-a-t-il convergence uniforme de la somme partielle des séries de Fourier vers f sur $\mathbb{R}$? Justifier.
6. Déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\beta}(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2 + \beta^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\beta} - (-1)^n}{\pi^2 n^2 + \beta^2}.$$

7. En déduire l'égalité suivante :

$$\frac{e^{\beta} - 1}{e^{\beta} + 1} = 2\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2 + \beta^2}.$$

8. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + 1}.$$

Rappel

1. Coefficients de Fourier : Soit f une fonction continue par morceaux T-périodique, alors les coefficients de Fourier de f sont définis comme suit :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)} dx, \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx, \quad \text{pour} \quad n \geq 0$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx. \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

2. Égalité de Parseval : Soit f une fonction continue par morceaux T-périodique, alors on l'égalité suivante :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{(a_0(f))^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} ((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2).$$

3. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)), \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)), \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \quad \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$