Université de Technologie de Compiègne

MT12 - Janvier 2025-Final
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (5 points)

1. Soit α un réel positif.
   (a) Pour quelle valeurs de α la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ? Justifier.
   (b) Pour quelle valeurs de α la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente ? Justifier.
2. Soient $a > 0$ et f une fonction non-nulle a-périodique appartient à $L^1(0, a)$.
   (a) Montrer que f n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. La fonction g appartient-elle à $L^1(0, +\infty)$ et à $L^1(\mathbb{R})$?
   (c) On suppose qu'il existe deux constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que
   $$|f(x)| \leq k_1 \quad \text{et} \quad |f(x)| \leq k_2|x| \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Montrer que dans ce cas $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (7 points)

1. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ les fonctions suivantes :
$$f(x) = x\ln(x) - x\ln(\sqrt{1 + x^2}) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x) - \ln(\sqrt{1 + x^2}).$$
   (a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
   <u>Indication</u> On peut exprimer $g(x)$ en fonction de $\ln(1 + \frac{1}{x^2})$ et utiliser le point (4) du rappel.
   (b) Montrer que f est une primitive g.
2. On considère pour tout $t \in]0, +\infty[$ l'intégrale à paramétrer suivante :
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-tx}dx.$$
   (a) Montrer que F est bien définie pour tout $t \in]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
   (c) Calculer $\lim_{t\to+\infty} F(t)$, en justifiant votre réponse.
   (d) Trouver une expression simplifiée de $F(t)$. (Aidez vous du point (5) du rappel).
3. On considère pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ l'intégrale à paramétrer suivante :
$$G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}e^{-tx}dx.$$
   (a) Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que
   $$|1 - \cos(x)| \leq \alpha x^2 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$
   en précisant la valeur de α. (Aidez vous du point (4) du rappel).
   (b) Justifier que G est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
   (c) Calculer $\lim_{t\to+\infty} G(t)$, en justifiant votre réponse.
   (d) Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (e) Montrer que G est dérivable sur $]0, +\infty[$, en donnant l'expression de $G'(t)$.
   (f) Calculer $\lim_{t\to+\infty} G'(t)$, en justifiant votre réponse.
   (g) On suppose que G' est dérivable. Donner (sans justifier) l'expression de $G''(t)$.
   (h) En déduire une expression simplifiée de $G'(t)$, puis la forme générale de $G(t)$.
   <u>Indication</u> : Penser à utiliser les questions 1 et 2-(d).
   (i) En déduire, en effectuant une intégration par partie dans G, la valeur de l'intégrale suivante :
   $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

Tournez la page S.V.P

Exercice 3. (5 points)

1. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire que le produit de convolution $(f \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)f(x-y)dy$ est bien défini.

   (c) Calculer explicitement la fonction $f \star f$.

   (d) Calculer la transformée de Fourier de f.

   (e) En déduire la transformée de Fourier de $f \star f$.

2. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$g'(x) + g(x) = f(x).$$

   (a) On suppose que g et g' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$. Exprimer la transformée de Fourier de g' en fonction de celle de g.

   (b) Calculer la transformée de Fourier de g.

   (c) En déduire la forme générale de g.

Exercice 4. (3 points)

1. Soit N un entier plus grand que 1. On considère pour tout entier $0 \leq \ell \leq N-1$ l'échantillon N-périodique suivant :

$$f_k^\ell = e^{2\pi i \ell \frac{k}{N}} \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, N-1.$$

   (a) Calculer les coefficients de Fourier discrets de cet échantillon.

   (b) En déduire les coefficients de Fourier discrets de l'échantillon

$$f_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} f_k^\ell \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, N-1.$$

   (c) Soit $g = (g_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ un échantillon N-périodique et h_k l' échantillon N-périodique suivant :

$$h_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_{k-j} g_j \qquad k = 0, \cdots, N-1,$$

   Trouver les coefficients de Fourier discrets de cet échantillon, en fonction de ceux de g.

Rappel

1. Transformée de Fourier : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f par la fonction suivante :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

2. Transformée de Fourier inverse : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier inverse de f par la fonction suivante :

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

3. Coefficients de Fourier discrets : Soit $f = (f_0, f_2, \cdots, f_{N-1})$ un échantillon N-périodique de $\mathbb{C}^N$, alors les coefficients de Fourier discrets de f sont définis comme suit :

$$c_n^N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n \frac{k}{N}} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

4. <u>Formule des accroissements finis d'ordre 2</u> : Pour tout $u \geq 0$, il existe une constante $0 < \theta < 1$ telle que
$$\cos u = 1 - \frac{1}{2}\cos(\theta u)u^2,$$
$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2(1+\theta u)^2}u^2.$$

5. <u>Formules trigonométriques</u> :
$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)), \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)), \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$
$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$