

La section 1 a pour but de vous faire découvrir comment fonctionnent les schémas classiques. A partir de la section 2, nous utiliserons la macro ode de Scilab.

1 Entrée en matière

1.1 Schémas à un pas

On considère la fonction $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ solution d'un problème de Cauchy, c'est à dire une équation différentielle munie d'une condition initiale en $t = 0$

$$y' = f(t, y), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$y(0) = y_0. \quad (2)$$

On suppose que f vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz, ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution de (1)-(2). Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on considère une discrétisation uniforme de l'intervalle $[0, T]$ sous la forme d'une suite $(t_n)_{n=0 \dots N}$ définie par $t_n = nh$ où $h = T/N$. Un schéma à un pas a pour but de construire une suite $(y_n)_{n=0 \dots N}$ approchant les valeurs de la solution y aux points t_n , c'est à dire $(y(t_n))_{n=0 \dots N}$, en considérant l'équation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n; h), n \in \{0 \dots N - 1\}.$$

En cours nous avons vu les schémas suivants :

1. Schéma d'Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

2. Schéma d'Euler-Cauchy

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

3. Schéma du point milieu

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),$$

$$y_{n+1} = y_n + hk_2.$$

4. Schéma de Runge et Kutta d'ordre 4

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

1.2 Evaluation de l'ordre des schémas

Nous allons évaluer expérimentalement l'ordre de ces schémas, c'est à dire la valeur de l'entier p tel que

$$\max_{n \in \{0 \dots N\}} |y(t_n) - y_n| = Ch^p + h^p \epsilon(h) \quad (3)$$

pour l'équation différentielle suivante

$$y' = -ty + t, \quad t \in [0, 4], \quad (4)$$

$$y(0) = 0. \quad (5)$$

Voici comment organiser votre travail :

1. Ecrivez une fonction scilab calculant le second-membre de l'équation différentielle (4) :

```
function dydt=f1(t,y)
    ...
endfunction
```

2. Ecrivez une fonction Scilab acceptant comme argument y_0 , un vecteur contenant $(t_n)_{n=0 \dots N}$ et l'identificateur de la fonction Scilab calculant f , et renvoyant dans un vecteur les approximations y_n pour $n = 0 \dots N$ données par le Schéma d'Euler :

```
function y=euler(y0,t,f)
    n=length(t);
    h=t(2)-t(1);
    y(1)=y0;
    ...
endfunction
```

3. Testez votre fonction en représentant graphiquement les approximations y_n superposées à la solution exacte $y(t)$, ceci pour des valeurs croissantes de N .
4. Recommencez les deux points précédents pour les trois autres schémas.
5. Pour chacun des schémas, calculez l'erreur de convergence $e(h)$ pour

$$N \in \{1, 3, 5, 10, 22, 47, 100, 216, 465, 1000\}$$

et représentez graphiquement $e(h)$ en fonction de h en utilisant une échelle logarithmique pour les abscisses et les ordonnées. Vérifiez que l'on obtient une droite de pente égale à l'ordre du schéma. Vous pouvez superposer les 4 courbes pour bien faire la différence entre les schémas.

6. Pour terminer, superposer à ce graphique $e(h)$ en fonction de h pour l'approximation renvoyée par la macro ode de Scilab. Cherchez dans la page d'aide de ode comment il est possible de contrôler cette précision.

2 Applications

2.1 Le pendule

Le pendule que nous allons considérer est représenté sur la figure 1. Nous supposons que la tige reliant un poids de masse M à l'axe de rotation est de masse négligeable devant M . Nous choisissons de mesurer la déviation du pendule de la position verticale d'équilibre stable par l'angle $\theta(t)$ mesuré positivement comme défini sur la figure 1.

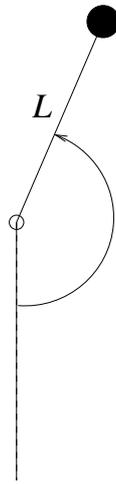


FIGURE 1 – Le pendule

Si l'on applique les relations de la dynamique pour les solides en rotation autour d'un axe, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\frac{g}{L} \sin\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \\ \theta'(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

La valeur de θ_0 donne la déviation initiale du pendule, et on a considéré que la vitesse angulaire initiale est nulle.

Dans un livre de physique de terminale on peut lire les choses suivantes à propos de cette équation différentielle :

Cette équation est non-linéaire à cause de $\sin\theta(t)$, et sa résolution est difficile.

Cela est assez malhonnête de présenter les choses ainsi, car en fait on ne lui connaît pas de solution analytique. Dans le même livre on peut lire la phrase suivante :

Cependant, si l'écart angulaire $\theta(t)$ est faible, sa mesure en radians est très peu différente de celle de $\sin\theta(t)$ [...] si on peut se contenter d'une solution approchée, nous pouvons linéariser l'équation en confondant $\theta(t)$ et $\sin\theta(t)$.

La proposition est assez claire : on vous propose de remplacer le modèle original, insoluble, par un modèle simplifié sur la base d'hypothèses bien précises, dont la solution est bien connue et s'exprime simplement à l'aide des fonctions trigonométriques. En effet, après linéarisation de (6), on obtient l'équation différentielle suivante, où θ a été remplacé par ϕ pour bien montrer que l'on ne résout plus le même problème :

$$\begin{cases} \phi''(t) = -\frac{g}{L} \phi(t), \\ \phi(0) = \theta_0, \\ \phi'(0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Il est assez élémentaire de montrer que la solution de cette équation différentielle est la fonction

$$\phi(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right).$$

On peut se demander quel est le domaine de validité de cette solution, c'est à dire, par rapport à l'équation originale en $\theta(t)$, jusqu'à quelle valeur peut-on aller pour θ_0 ? Cela dépend de l'utilisation

que l'on veut faire de ce modèle. Si on désire par exemple dimensionner un pendule (choix de L) de façon à pouvoir l'utiliser comme une horloge, il faudra certainement faire attention à ne pas prendre un θ_0 trop grand. On cherche donc à comparer la solution du modèle linéarisé avec l'approximation donnée par la macro ode de Scilab.

1. On pose

$$y = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix},$$

écrire (6) sous une forme du premier ordre en temps $y' = f(t, y)$ et écrire la fonction Scilab calculant f :

```
function dydt=f(t,y)
    theta=y(1);
    thetaprime=y(2);
    ...
endfunction
```

2. Pour plusieurs valeurs de θ_0

$$\theta_0 = \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{63\pi}{64}$$

superposer sur un même graphique la solution linéarisée et l'approximation donnée par Scilab.

3 Systèmes dynamiques

3.1 Equation de Duffing

3.1.1 Système autonome

On considère l'équation différentielle

$$x'' + kx' - x + x^3 = 0,$$

avec $k = 0.15$.

1. Mettre cette équation différentielle sous forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre en temps

$$X' = f(t, X),$$

puis déterminer les points d'équilibre de ce système. Ces points d'équilibre sont-ils stables ou instables?

2. Utiliser la fonction ode de Scilab pour calculer la solution de l'équation différentielle avec des conditions initiales $X(0)$ choisies de manière à illustrer les résultats établis à la question précédente. On pourra par exemple représenter le champ de vecteurs $f(X)$ et les solutions obtenues dans le plan de phase (O, X_1, X_2) .

3.1.2 Système non autonome

On considère maintenant l'équation différentielle

$$x'' + kx' - x + x^3 = b \cos t,$$

avec $b = 0.3$ et pour conditions initiales $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

1. Calculez avec ode la solution de l'équation différentielle pour $t \in [0, 40\pi]$.
2. Calculez la solution en prenant les conditions initiales $x(0) = 10^{-6}$, $\dot{x}(0) = 0$.
3. Superposer les deux solutions obtenues et commentez le phénomène observé.

3.2 Equation de Van der Pol

On considère l'équation différentielle

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0.$$

1. Calculer les points d'équilibre et déterminer leur stabilité.
2. Illustrer le résultat obtenu à la question précédente en approchant la solution de l'équation différentielle pour un choix adéquat de condition initiale. On pourra prendre des valeurs de μ comprises entre 0.01 et 5.
3. Commenter les résultats obtenus.

3.3 Système proie-prédateur (Lokta-Volterra)

$$\begin{aligned}x' &= x(\alpha - \beta y) \\y' &= -y(\gamma - \delta x)\end{aligned}$$

Etudiez les points fixes et simulez le système pour

$$\alpha = 2, \beta = 10^{-3}, \gamma = 10, \delta = 2 \cdot 10^{-3}.$$

4 Système de Lorenz

Etudiez les éventuels points fixes du système de Lorenz

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x), \\y' &= \rho x - y - xz, \\z' &= xy - \beta z,\end{aligned}$$

où σ , ρ et β sont des nombres positifs. Représentez les trajectoires du système de Lorenz pour $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$.