

MT22 - TD6

Plan et droite dans l'espace.
Surface définie par une équation implicite et explicite.

Exercice 1.

1. Soient M_1, M_2, M_3 3 points non alignés de coordonnées respectives $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$, déterminer une équation du plan passant par ces 3 points.
2. Application : $M_1 = (0, 2, 1), M_2 = (1, 0, 1), M_3 = (0, 0, -1)$ Réponse : $2x + y - z = 1$

Exercice 2. Soit M_1 un point de coordonnées (x_1, y_1, z_1) .

1. On définit le plan Π passant par le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et perpendiculaire au vecteur \vec{N} . On appelle $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ la projection orthogonale de M_1 sur Π . Montrer que la distance de M_1 à Π (c-à-d, la distance de M_1 à M_2) vaut

$$\frac{|M_0 \vec{M}_1 \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

2. On suppose désormais que l'équation de Π est $ax + by + cz = d$. Montrer que la distance de M_1 à Π vaut

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3. Déterminer les coordonnées de M_2 .
4. En déduire la distance de M_1 à Π . Comparer avec le résultat obtenu dans la question 2.

Exercice 3.

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite D dont les équations cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

2. Trouver les coordonnées d'un point particulier de D .
3. En déduire des équations paramétriques de D .

Exercice 4.

1. Est-ce que tout plan a une équation explicite de la forme $z = \phi(x, y)$? Si oui, montrez le, si non donnez un contre-exemple.
2. Est-ce qu'une sphère a une équation explicite de la forme $z = \phi(x, y)$?
3. Donner une équation cartésienne explicite de la demi-sphère définie par :

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 5, \quad y \geq 2.$$