Université de Technologie de Compiègne

MT22 - TD6 - Corrigé
Plan et droite dans l'espace.
Surface définie par une équation implicite et explicite.

Exercice 1.

1. Soient M_1, M_2, M_3 3 points non alignés de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), déterminer une équation du plan passant par ces 3 points.
Corrigé : Soit $M = (x, y, z)$ un point de ce plan. Alors on sait que le trois vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M}$ sont coplanaires. Du coup leur produit mixte est nul, à savoir

$$(\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3})\cdot\overrightarrow{M_1M} = ((x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \wedge (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1))\cdot(x-x_1, y-y_1, z-z_1) = 0.$$

Si on note maintenant

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \wedge (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) = (a, b, c)$$

alors on déduit que

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

2. Application : $M_1 = (0, 2, 1)$, $M_2 = (1, 0, 1)$, $M_3 = (0, 0, -1)$.
Corrigé : On remplace les coordonnées de points M_1, M_2, M_3 par leurs valeurs, on obtient $2x + y - z = 1$.

Exercice 2. Soit M_1 un point de coordonnées (x_1, y_1, z_1).

1. On définit le plan Π passant par le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et perpendiculaire au vecteur $\vec{N}$. On appelle $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ la projection orthogonale de M_1 sur Π. Montrer que la distance de M_1 à Π (c-à-d, la distance de M_1 à M_2) vaut

$$\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}.\vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

Corrigé : Soit M_2 la projection orthogonale de M_1 sur Π. Alors, $\overrightarrow{M_0M_2}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{M_2M_1}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires. Par conséquent,

$$\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}.\vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(\overrightarrow{M_0M_2} + \overrightarrow{M_2M_1}).\vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|\overrightarrow{M_2M_1}.\vec{N}|}{\vec{N}} = \frac{|\|\overrightarrow{M_2M_1}\|\|\vec{N}\|\cos(\theta)|}{\|\vec{N}\|} = \|\overrightarrow{M_2M_1}\|.$$

2. On suppose désormais que l'équation de Π est $ax + by + cz = d$. Montrer que la distance de M_1 à Π vaut

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Corrigé : Dans ce cas on sait que $\vec{N} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ et $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ (car $M_0 \in \Pi$). Du coup,

$$\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}.\vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3. Déterminer les coordonnées de M_2.
Corrigé : On sait que $ax_2 + by_2 + cz_2 = d$ (car $M_2 \in \Pi$) et de plus $\overrightarrow{M_2M_1}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires. Alors $\overrightarrow{M_2M_1} = \alpha\vec{N}$, avec

$$\alpha = \frac{\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \vec{N}}{\vec{N} \cdot \vec{N}} = \frac{a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cela montre que $\overrightarrow{M_2M_1} = (\frac{ax_1+by_1+cz_1-d}{a^2+b^2+c^2})\vec{N}$. Par conséquent,

$$x_2 = x_1 - \left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2}\right) a,$$

$$y_2 = y_1 - \left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2}\right) b,$$

$$z_2 = z_1 - \left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2}\right) c.$$

4. En déduire la distance de M_1 à Π. Comparer avec le résultat obtenu dans la question 2.
   Corrigé :

$$\|\overrightarrow{M_2M_1}\| = |\alpha|\|\overrightarrow{N}\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

   Ce qui est retrouver dans la question 2.

Exercice 3.

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite D dont les équations cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

   Corrigé : Il suffit de calculer le vecteur

$$\overrightarrow{V} = (1, 1, 1) \wedge (1, -1, 2) = (3, -1, -2)$$

2. Trouver les coordonnées d'un point particulier de D.
   Corrigé : En prenant $z = 0$, on trouve le point $M_0 = (1, 0, 0)$.
3. En déduire des équations paramétriques de D.
   Corrigé : L'équation paramétrique est

$$D : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

1. Est-ce que tout plan a une équation explicite de la forme $z = \phi(x, y)$? Si oui, montrez le, si non donnez un contre-exemple.
   Corrigé : Non, le plan d'équation $x + y = 1$ n'admet pas une représentation explicite en fonction de z.
2. Est-ce qu'une sphère a une équation explicite de la forme $z = \phi(x, y)$?
   Corrigé : Non, pour une sphère on a deux représentations possibles. En effet, l'équation cartésienne implicite d'une sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. Il y a alors deux valeurs possibles pour z, à savoir $z = \pm\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$.
3. Donner une équation cartésienne explicite de la demi-sphère définie par :

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 5, \qquad y \geq 2.$$

   Corrigé : $y = \sqrt{5 - (x - 1)^2 - (z + 1)^2}$.