Chapitre 4 : Valeurs propres, vecteurs propres

Vincent Martin

LMAC - UTC

1. Préambule

2. Définitions des valeurs propres

3. Polynôme caractéristique et valeurs propres

4. Diagonalisation

5. Vecteurs propres, sous-espaces propres
   5a) Somme directe de seV propres
   5b) Matrices par blocs et dimensions des seV propres
   5b) 2ème CNS de diagonalisation

4. Trigonalisation, jordanisation

5. Cayley-Hamilton

Table of contents

1. Préambule
2. Définitions des valeurs propres
3. Polynôme caractéristique et valeurs propres
4. Diagonalisation
5. Vecteurs propres, sous-espaces propres
    5a) Somme directe de seV propres
    5b) Matrices par blocs et dimensions des seV propres
    5b) 2ème CNS de diagonalisation
4. Trigonalisation, jordanisation
5. Cayley-Hamilton

Cadre

Dans ce chapitre nous considérons uniquement des endomorphismes et des matrices carrées.
Cadre :

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n > 0$.
- Soit u une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n$ la matrice associée à u dans une base donnée $\mathcal{E}$ de E.

Notations

Quelques notations :

- $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois } u}$ est la composée $k \geq 0$ fois de u.
  - $u^0 = \mathrm{id}_E$ est l'identité sur E, $u^1 = u$, $u^2 = u \circ u \ldots$
- De même : $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois } A}$ est le produit de k fois A
  - $A^0 = I_n$ (matrice identité de $\mathcal{M}_n$), $A^1 = A$, $A^2 = AA \ldots$

Notations

Quelques notations :

- $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois } u}$ est la composée $k \geq 0$ fois de u.
  - $u^0 = \mathrm{id}_E$ est l'identité sur E, $u^1 = u$, $u^2 = u \circ u \ldots$
- De même : $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois } A}$ est le produit de k fois A
  - $A^0 = I_n$ (matrice identité de $\mathcal{M}_n$), $A^1 = A$, $A^2 = AA \ldots$

Comme I_n commute avec toute matrice $((\lambda I_n)A = A(\lambda I_n) = \lambda A)$:
Formule du binôme de Newton

- $(A + \lambda I_n)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i A^{k-i}$ (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
- mais en général $(A + B)^k \neq \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^{k-i} B^i$ (si $AB \neq BA$).

Motivation : un exemple

On calcule les puissances d'une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 27 & 7 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 149 & 41 \\ 82 & 26 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 827 & 231 \\ 462 & 134 \end{pmatrix} \dots$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, D^3 = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, D^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 1/2^4 \end{pmatrix} \dots$$

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, T^2 = \begin{pmatrix} 25 & 5,5 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 125 & 27,75 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, T^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 138,875 \\ 0 & 1/2^4 \end{pmatrix} \dots$$

Motivation : un exemple

On calcule les puissances d'une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 27 & 7 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 149 & 41 \\ 82 & 26 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 827 & 231 \\ 462 & 134 \end{pmatrix} \dots$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, D^3 = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, D^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 1/2^4 \end{pmatrix} \dots$$

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, T^2 = \begin{pmatrix} 25 & 5,5 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 125 & 27,75 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, T^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 138,875 \\ 0 & 1/2^4 \end{pmatrix} \dots$$

- Pour une matrice diagonale, c'est facile de calculer les puissances :
  Si $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, alors $D^k = \text{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$.
- Pour une matrice triangulaire, c'est facile de calculer les termes diagonaux :
  Si $\text{diag}(T) = [t_1, t_2, \dots, t_n]$, alors $\text{diag}(T^k) = [t_1^k, t_2^k, \dots, t_n^k]$.
- Et pour une matrice quelconque : ???

Motivation : un exemple

On calcule les puissances d'une matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 27 & 7 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 149 & 41 \\ 82 & 26 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 827 & 231 \\ 462 & 134 \end{pmatrix} \dots$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, D^3 = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, D^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 1/2^4 \end{pmatrix} \dots$$

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, T^2 = \begin{pmatrix} 25 & 5,5 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 125 & 27,75 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, T^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 138,875 \\ 0 & 1/2^4 \end{pmatrix} \dots$$

- Pour une matrice diagonale, c'est facile de calculer les puissances :
  Si $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, alors $D^k = \text{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$.
- Pour une matrice triangulaire, c'est facile de calculer les termes diagonaux :
  Si $\text{diag}(T) = [t_1, t_2, \dots, t_n]$, alors $\text{diag}(T^k) = [t_1^k, t_2^k, \dots, t_n^k]$.
- Et pour une matrice quelconque : ??? Si B est semblable à A, en notant P la matrice inversible tq. $A = P^{-1}BP$,
  Alors $A^k = P^{-1}B^kP$. Si B est diagonale : calcul facile...

Valeurs propres : pourquoi ?

- l'objectif est de trouver une base dans laquelle la matrice de u est simple : soit diagonale (pas toujours possible), soit triangulaire supérieure;
    - trouver des sous-espaces V_λ où u se comporte comme une homothétie ou une rotation ou... ;
    - trouver $(\lambda, \vec{y})$ tels que u appliqué à $\vec{y}$ reste colinéaire à ce vecteur : $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}$ et $\vec{y} \neq 0$ ...
    - V_λ sera un sous-espace propre,
    - $(\lambda, \vec{y}) \in \mathbb{K} \times E$ est un couple propre,
    - λ une valeur propre et $\vec{y} \neq 0$ est un vecteur propre associé
- les valeurs propres sont un moyen de caractériser le comportement d'un endomorphisme;
- utile pour la équations différentielles, la mécanique, l'informatique, la chimie...

Table of contents

1. Préambule
2. Définitions des valeurs propres
3. Polynôme caractéristique et valeurs propres
4. Diagonalisation
5. Vecteurs propres, sous-espaces propres
   5a) Somme directe de seV propres
   5b) Matrices par blocs et dimensions des seV propres
   5b) 2ème CNS de diagonalisation
4. Trigonalisation, jordanisation
5. Cayley-Hamilton

Valeurs propres : définition

Définition 4.1.1.

On considère E un $\mathbb{K}$ e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors par définition : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre pour u, si il existe $\vec{y} \neq 0$ dans E tel que

$$u(\vec{y}) = \lambda \vec{y}.$$

Valeurs propres : définition

Définition 4.1.1.

On considère E un $\mathbb{K}$ e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors par définition : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre pour u, si il existe $\vec{y} \neq 0$ dans E tel que

$$u(\vec{y}) = \lambda \vec{y}.$$

Idem pour une matrice carrée :

Définition 4.1.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. Alors par définition : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre pour A, si il existe $Y \neq 0$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que

$$AY = \lambda Y.$$

Exemples 1)

Exemples : On suppose que F_1 et F_2 (non-nuls) sont supplémentaires : $E = F_1 \oplus F_2$.
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = f_1 + f_2$ (où $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$).

- Exemple 1 : projection p définie par $p(x) = f_1$ si $x = f_1 + f_2$.
  Alors : $f_1 \neq 0$ vecteur propre associée de p à la vp 1,
  $f_2 \neq 0$ vecteur propre de p associée à la vp 0.
- Exemple 2 : symétrie s définie par $s(x) = f_1 - f_2$ si $x = f_1 + f_2$.
  Alors : $f_1 \neq 0$ vecteur propre de s associée à la vp 1,
  $f_2 \neq 0$ vecteur propre de s associée à la vp -1.

Table of contents

1. Préambule
2. Définitions des valeurs propres
3. Polynôme caractéristique et valeurs propres
4. Diagonalisation
5. Vecteurs propres, sous-espaces propres
   5a) Somme directe de seV propres
   5b) Matrices par blocs et dimensions des seV propres
   5b) 2ème CNS de diagonalisation
4. Trigonalisation, jordanisation
5. Cayley-Hamilton

Polynôme caractéristique 1)

On a (en utilisant le théorème du rang pour passer de la 4e à 5e équivalence, avec $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ endomorphisme) :

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ vp de } u &\iff \exists \vec{y} \in E, \vec{y} \neq 0 \text{ et } u(\vec{y}) = \lambda \vec{y} \\
&\iff \exists \vec{y} \neq 0 \text{ et } (u - \lambda \mathrm{id}_E)(\vec{y}) = 0 \\
&\iff \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\} \\
&\iff (u - \lambda \mathrm{id}_E) \text{ pas injective} \\
&\iff (u - \lambda \mathrm{id}_E) \text{ pas bijective} \\
&\iff \det(u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0
\end{aligned}
$$

Polynôme caractéristique 1)

On a (en utilisant le théorème du rang pour passer de la 4e à 5e équivalence, avec $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ endomorphisme) :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ vp de } u \quad & \iff \quad \exists \vec{y} \in E, \vec{y} \neq 0 \text{ et } u(\vec{y}) = \lambda \vec{y} \\
& \iff \quad \exists \vec{y} \neq 0 \text{ et } (u - \lambda \mathrm{id}_E)(\vec{y}) = 0 \\
& \iff \quad \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\} \\
& \iff \quad (u - \lambda \mathrm{id}_E) \text{ pas injective} \\
& \iff \quad (u - \lambda \mathrm{id}_E) \text{ pas bijective} \\
& \iff \quad \det(u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0
\end{aligned}$$

Idem pour A (avec $(A - \lambda I_n)$ carrée) :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ vp de } A \quad & \iff \quad \exists Y \in \mathbb{K}^n, Y \neq 0 \text{ et } AY = \lambda Y \\
& \iff \quad \exists Y \neq 0 \text{ et } (A - \lambda I_n)(Y) = 0 \\
& \iff \quad \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\
& \iff \quad (A - \lambda I_n) \text{ pas injective} \\
& \iff \quad (A - \lambda I_n) \text{ pas bijective} \\
& \iff \quad \det(A - \lambda I_n) = 0
\end{aligned}$$

Polynôme caractéristique 2)

Définition 4.1.3.

On définit le polynôme caractéristique de u (ou de A) comme

$$\Pi_u(s) = \det(u - s\,\mathrm{id}_E), \qquad (\text{ou } \Pi_A(s) = \det(A - s\,I_n)).$$

Polynôme caractéristique 2)

Définition 4.1.3.

On définit le polynôme caractéristique de u (ou de A) comme

$$\Pi_u(s) = \det(u - s\,\mathrm{id}_E), \qquad (\text{ou } \Pi_A(s) = \det(A - s\,I_n)).$$

Résultats (valables aussi pour A) :

- Π_u est un polynôme de degré n.
- $\Pi_u(s) = (-1)^n \det(s\,\mathrm{id}_E - u)$ ($\det(s\,\mathrm{id}_E - u)$ = définition alternative du polynôme caractéristique).
- Les racines de Π_u sont les valeurs propres de u (Proposition 4.1.1).
- Si λ est vp pour u, on appelle multiplicité de la vp λ (notée $r_\lambda \geq 1$) la multiplicité de la racine Π_u. (Définition 4.1.4.).

Polynôme caractéristique 3)

$$\Pi_u(s) = \det(u - s\,\mathrm{id}_E), \quad \Pi_A(s) = \det(A - s\,I_n).$$

Polynôme caractéristique 3)

$$\Pi_u(s) = \det(u - s\,\mathrm{id}_E), \quad \Pi_A(s) = \det(A - s\,I_n).$$

Résultats (suite) :

- Si A et A' sont semblables, $A - \lambda I_n$ et $A' - \lambda I_n$ sont semblables aussi (avec la même matrice P de passage).
  En effet : si il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$, alors (comme $I_n = P^{-1}P$) :
  $A' - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$.
- Donc $\Pi_A = \Pi_{A'}$ pour toutes matrices A, A' semblables.
  En effet, le déterminant est le même pour 2 matrices semblables.
- Et enfin $\Pi_u = \Pi_A = \Pi_{A'}$ pour toutes matrices A, A' représentant u dans deux bases données. (Proposition 4.1.5.)
  En effet, A et A' sont semblables dans ce cas.
- Donc les vp de u, A et A' (semblables) sont identiques.
  (Mais les vecteurs propres associés sont différents ($\rightarrow$ il faut changer de base!).)

Exemples

Exemple 1 : ($n = 3$)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_1}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 3-s & -1 \\ 0 & -1 & 3-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_1}(s) = (2-s)(2-s)(4-s).$$

Exemples

Exemple 1 : ($n = 3$)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_1}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 3-s & -1 \\ 0 & -1 & 3-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_1}(s) = (2-s)(2-s)(4-s).$$

- vp réelles : 2 (double), 4 (simple).
- vecteurs propres (résolution de systèmes $A_1 y = \lambda y$) :
  $\ker(A_1 - 2I) = \mathrm{Vect}([1,0,0]^T, [0,1,1]^T)$,
  $\ker(A_1 - 4I) = \mathrm{Vect}([0,1,-1]^T)$.

Exemples

Exemple 1 : ($n = 3$)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_1}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 3-s & -1 \\ 0 & -1 & 3-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_1}(s) = (2-s)(2-s)(4-s).$$

- vp réelles : 2 (double), 4 (simple).
- vecteurs propres (résolution de systèmes $A_1 y = \lambda y$) :
  $\ker(A_1 - 2I) = \mathrm{Vect}([1,0,0]^T, [0,1,1]^T)$,
  $\ker(A_1 - 4I) = \mathrm{Vect}([0,1,-1]^T)$.
- **Noter :** $\dim(\ker(A_1 - 2I)) = 2 = r_2$ et
  $\dim(\ker(A_1 - 4I)) = 1 = r_4$ (pas toujours vrai).

Exemples

Exemple 2 : ($n = 3$)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_2}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1 \\ 0 & -1 & 1-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_2}(s) = (2-s)((1+i)-s)((1-i)-s).$$

Exemples

Exemple 2 : ($n = 3$)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_2}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1 \\ 0 & -1 & 1-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_2}(s) = (2-s)((1+i)-s)((1-i)-s).$$

- vp (complexes) : 2 (simple), $(1+i)$ (simple) et $(1-i)$ (simple). $\Longrightarrow$ Il faut se plonger dans $\mathbb{C}$.
- vecteurs propres (résolution de systèmes $A_2 y = \lambda y$) :
  $\ker(A_2 - 2I) = \text{Vect}([1,0,0]^T)$,
  $\ker(A_2 - (1+i)I) = \text{Vect}([0,1,i]^T)$,
  $\ker(A_2 - (1-i)I) = \text{Vect}([0,1,-i]^T)$.

Exemples

Exemple 2 : ($n = 3$)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_2}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1 \\ 0 & -1 & 1-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_2}(s) = (2-s)((1+i)-s)((1-i)-s).$$

- vp (complexes) : 2 (simple), $(1+i)$ (simple) et $(1-i)$ (simple). $\Longrightarrow$ Il faut se plonger dans $\mathbb{C}$.
- vecteurs propres (résolution de systèmes $A_2 y = \lambda y$) :
  $\ker(A_2 - 2I) = \text{Vect}([1,0,0]^T)$,
  $\ker(A_2 - (1+i)I) = \text{Vect}([0,1,i]^T)$,
  $\ker(A_2 - (1-i)I) = \text{Vect}([0,1,-i]^T)$.
- **Noter :** A_2 réelle, 2 vp complexes conjuguées, vecteurs propres complexes conjugués.
- **Noter :** ici, $\dim(\ker(A_2 - \lambda I)) = 1 = r_\lambda$ pour toutes les vp.

Exemples

Exemple 3 : ($n = 3$)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_3}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 3-s & -1 \\ 0 & 0 & 3-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_3}(s) = (2-s)(3-s)^2.$$

Exemples

Exemple 3 : ($n = 3$)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_3}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 3-s & -1 \\ 0 & 0 & 3-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_3}(s) = (2-s)(3-s)^2.$$

- vp : 2 (simple), 3 (double).
- vecteurs propres (résolution de systèmes $A_3 y = \lambda y$) :
  $\ker(A_3 - 2I) = \mathrm{Vect}([1, 0, 0]^T)$,
  $\ker(A_3 - 3I) = \mathrm{Vect}([0, 1, 0]^T)$.

Exemples

Exemple 3 : ($n = 3$)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{A_3}(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 0 & 0 \\ 0 & 3-s & -1 \\ 0 & 0 & 3-s \end{vmatrix}$$

$$\Pi_{A_3}(s) = (2-s)(3-s)^2.$$

- vp : 2 (simple), 3 (double).
- vecteurs propres (résolution de systèmes $A_3 y = \lambda y$) :
  $\ker(A_3 - 2I) = \mathrm{Vect}([1,0,0]^T)$,
  $\ker(A_3 - 3I) = \mathrm{Vect}([0,1,0]^T)$.
- **Noter :** ici, $\dim(\ker(A_3 - 3I)) = 1 < 2 = r_3$.
  C'est le cas général : A_3 n'est pas diagonalisable (mais elle est trigonalisable : elle est déjà triangulaire).

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

On a

$$\Pi_A(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} - s & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - s \end{vmatrix}$$

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Formule du déterminant avec les permutations :
$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$, où $\varepsilon = \pm 1$ selon σ.
Donc en séparant $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$ ($\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$) des autres permutations :

$$\Pi_A(s) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - s)}_{p_1(s)} + \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n\setminus\{\mathrm{id}\}} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)i} - s\delta_{\sigma(i)i})}_{q_\sigma(s)}$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (symbole de Kronecker).

$$\begin{aligned} p_1(s) &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (s - a_{ii}) = (-1)^n (s - a_{11})(s - a_{22}) \dots (s - a_{nn}) \\ &= (-1)^n \Big[s^n - \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})}_{\mathrm{Tr}(A)} s^{n-1} + \underbrace{\dots + \prod_{i=1}^{n} a_{ii}}_{r_{n-2} \text{ de } \deg \leq n-2} \Big] \end{aligned}$$

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Pour q_σ : (rappel : σ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ sur $\{1, \ldots, n\}$)
σ n'est pas l'identité, donc $\exists j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(j) \neq j$. Posons $k \overset{\text{def.}}{=} \sigma(j)$, on a donc $k \neq j$. De plus, comme σ est bijective, $\sigma(k) \neq k$ (sinon on aurait $\sigma(j) = k = \sigma(k)$, ce qui contredit σ est injective).

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Pour q_σ : (rappel : σ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ sur $\{1, \ldots, n\}$)
σ n'est pas l'identité, donc $\exists j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(j) \neq j$. Posons $k \overset{\text{def.}}{=} \sigma(j)$, on a donc $k \neq j$. De plus, comme σ est bijective, $\sigma(k) \neq k$ (sinon on aurait $\sigma(j) = k = \sigma(k)$, ce qui contredit σ est injective).
On conclut qu'au moins deux indices distincts j et k sont tels que $\sigma(j) \neq j$ et $\sigma(k) \neq k$.
Donc $(A - sI)_{\sigma(j)j} = a_{\sigma(j)j}$ et $(A - sI)_{\sigma(k)k} = a_{\sigma(k)k}$ (termes hors diagonale, donc indépendants de s).

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Pour q_σ : (rappel : σ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ sur $\{1, \ldots, n\}$)
σ n'est pas l'identité, donc $\exists j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(j) \neq j$. Posons $k \stackrel{\text{def.}}{=} \sigma(j)$, on a donc $k \neq j$. De plus, comme σ est bijective, $\sigma(k) \neq k$ (sinon on aurait $\sigma(j) = k = \sigma(k)$, ce qui contredit σ est injective).
On conclut qu'au moins deux indices distincts j et k sont tels que $\sigma(j) \neq j$ et $\sigma(k) \neq k$.
Donc $(A - sI)_{\sigma(j)j} = a_{\sigma(j)j}$ et $(A - sI)_{\sigma(k)k} = a_{\sigma(k)k}$ (termes hors diagonale, donc indépendants de s). Il vient :

$$q_\sigma(s) \;=\; \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j, i\neq k}}^{n} \left(a_{\sigma(i)i} - s\delta_{\sigma(i)i}\right) a_{\sigma(j)j}\, a_{\sigma(k)k}$$

donc q_σ est de degré $\leq n - 2$.

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Pour q_σ : (rappel : σ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ sur $\{1, \ldots, n\}$)
σ n'est pas l'identité, donc $\exists j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(j) \neq j$. Posons $k \overset{\text{def.}}{=} \sigma(j)$, on a donc $k \neq j$. De plus, comme σ est bijective, $\sigma(k) \neq k$ (sinon on aurait $\sigma(j) = k = \sigma(k)$, ce qui contredit σ est injective).
On conclut qu'au moins deux indices distincts j et k sont tels que $\sigma(j) \neq j$ et $\sigma(k) \neq k$.
Donc $(A - sI)_{\sigma(j)j} = a_{\sigma(j)j}$ et $(A - sI)_{\sigma(k)k} = a_{\sigma(k)k}$ (termes hors diagonale, donc indépendants de s). Il vient :

$$q_\sigma(s) \;=\; \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j, i\neq k}}^{n} (a_{\sigma(i)i} - s\delta_{\sigma(i)i})\, a_{\sigma(j)j}\, a_{\sigma(k)k}$$

donc q_σ est de degré $\leq n-2$.

Donc $q_{n-2}(s) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)i} - s\delta_{\sigma(i)i})$ est de degré $\leq n-2$.

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Conclusion, avec $\Pi_A(s) = p_1(s) + q_{n-2}(s)$:

- Π_A est un polynôme de degré n tel que

$$\begin{aligned}
\Pi_A(s) &= (-1)^n \big[s^n - \mathrm{Tr}(A) s^{n-1} + \underbrace{r_{n-2}(s) + (-1)^n q_{n-2}(s)}_{\deg \leq n-2}\big], \\
\Pi_A(0) &= \det(A) \qquad (\text{car } \Pi_A(0) = \det(A - 0\, I_n)).
\end{aligned}$$

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Conclusion, avec $\Pi_A(s) = p_1(s) + q_{n-2}(s)$:

- Π_A est un polynôme de degré n tel que

$$\begin{aligned}
\Pi_A(s) &= (-1)^n \big[s^n - \mathrm{Tr}(A) s^{n-1} + \underbrace{r_{n-2}(s) + (-1)^n q_{n-2}(s)}_{\deg \leq n-2} \big], \\
\Pi_A(0) &= \det(A) \qquad (\text{car } \Pi_A(0) = \det(A - 0\, I_n)).
\end{aligned}$$

- D'après le Théorème de D'Alembert ($(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ étant les n racines (distinctes ou non) de Π_A dans $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
\Pi_A(s) &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i) = (-1)^n (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \ldots (s - \lambda_n) \\
&= (-1)^n \big[s^n - \big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big) s^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \big]
\end{aligned}$$

Polynôme caractéristique 4) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Conclusion, avec $\Pi_A(s) = p_1(s) + q_{n-2}(s)$:

- Π_A est un polynôme de degré n tel que

$$\begin{aligned}
\Pi_A(s) &= (-1)^n \big[s^n - \mathrm{Tr}(A) s^{n-1} + \underbrace{r_{n-2}(s) + (-1)^n q_{n-2}(s)}_{\deg \leq n-2} \big], \\
\Pi_A(0) &= \det(A) \qquad (\text{car } \Pi_A(0) = \det(A - 0\, I_n)).
\end{aligned}$$

- D'après le Théorème de D'Alembert ($(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ étant les n racines (distinctes ou non) de Π_A dans $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
\Pi_A(s) &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i) = (-1)^n (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \ldots (s - \lambda_n) \\
&= (-1)^n \big[s^n - \big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big) s^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \big]
\end{aligned}$$

En identifiant ($\{1, s, s^2, \ldots, s^n\}$ base de $\mathcal{P}_n$), on obtient

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Polynôme caractéristique 5) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

- On peut réécrire Π_A en notant $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ ses p racines distinctes de multiplicités $r_1, r_2, \ldots, r_p$,

$$\Pi_A(s) \;=\; (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i) \;=\; (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (s - \mu_k)^{r_k},$$

$$\text{avec } r_k \geq 1, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{p} r_k = n.$$

Chaque λ_i est l'un des μ_k
Et plusieurs λ_i peuvent valoir le même μ_k (si $r_k \geq 2$)...

Par exemple, si $p = n$, chaque r_k vaut 1 et l'un des λ_i (tous distincts ici) est exactement l'un des μ_k.

Polynôme caractéristique 6) $\Pi_A(s) = \det(A - s\, I_n)$.

Encore des résultats :

- si A est triangulaire, alors ses vp sont sur les termes diagonaux.
- λ vp de $A \iff \overline{\lambda}$ est vp de $\overline{A}$ (avec la même multiplicité)
- si A est réelle, alors :
  λ vp de $A \iff \overline{\lambda}$ est vp de A (avec la même multiplicité)
- $\Pi_A = \Pi_{A^T}$, donc A et A^T ont les mêmes vp (avec la même multiplicité)
  (mais pas les mêmes vecteurs propres).

Calcul pratique des couples propres

- **trouver les valeurs propres :** calculer le polynôme caractéristique
  - déterminant : $\rightarrow$ introduire des termes nuls
  - chercher à factoriser dès que possible
  - trouver les racines de Π_A (*a priori* dans $\mathbb{C}$) : ce sont les n vp λ_i
  - écrire leurs multiplicités r_{λ_i}
  - vérifications simples : $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$? $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$?
- **trouver les vecteurs propres** : résoudre $Ay = \lambda y$
  - solution : eV de dimension ≥ 1
  - $\rightarrow$ toujours au moins une équation redondante
  - écrire le seV propre : $\ker(A - \lambda_i I_n)$
  - $\rightarrow$ en donner une base et sa dimension d_{λ_i}.

Table of contents

1. Préambule
2. Définitions des valeurs propres
3. Polynôme caractéristique et valeurs propres
4. Diagonalisation
5. Vecteurs propres, sous-espaces propres
   5a) Somme directe de seV propres
   5b) Matrices par blocs et dimensions des seV propres
   5b) 2ème CNS de diagonalisation
4. Trigonalisation, jordanisation
5. Cayley-Hamilton

Changement de base et couple propre

On suppose que A et A' sont semblables : il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$. Alors, on a :

$$
\begin{aligned}
(\lambda, Y) \text{ couple propre de } A \quad &\iff \quad Y \neq 0 (\in \mathbb{K}^n) \text{ et } AY = \lambda Y \\
&\iff \quad Y \neq 0 \text{ et } P^{-1}AY = \lambda P^{-1}Y \\
&\iff \quad Y \neq 0 \text{ et } P^{-1}A(PP^{-1})Y = \lambda P^{-1}Y \\
&\iff \quad Y \neq 0 \text{ et } (P^{-1}AP)P^{-1}Y = \lambda P^{-1}Y \\
&\iff \quad Y \neq 0 \text{ et } A'(P^{-1}Y) = \lambda (P^{-1}Y) \\
&\iff \quad Y' \neq 0 \text{ et } A'Y' = \lambda Y' \\
&\iff \quad (\lambda, Y') \text{ couple propre de } A',
\end{aligned}
$$

en posant $Y' \stackrel{\text{def.}}{=} P^{-1}Y$ (non nul car $Y \neq 0$ et P inversible donc $\ker(P) = \{0\}$). Même vp, vec.p modifié par chgt de base.

Changement de base et couple propre

On suppose que A et A' sont semblables : il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda, Y) \text{ couple propre de } A \quad &\Longleftrightarrow \quad Y \neq 0 (\in \mathbb{K}^n) \text{ et } AY = \lambda Y \\
&\Longleftrightarrow \quad Y \neq 0 \text{ et } P^{-1}AY = \lambda P^{-1}Y \\
&\Longleftrightarrow \quad Y \neq 0 \text{ et } P^{-1}A(PP^{-1})Y = \lambda P^{-1}Y \\
&\Longleftrightarrow \quad Y \neq 0 \text{ et } (P^{-1}AP)P^{-1}Y = \lambda P^{-1}Y \\
&\Longleftrightarrow \quad Y \neq 0 \text{ et } A'(P^{-1}Y) = \lambda(P^{-1}Y) \\
&\Longleftrightarrow \quad Y' \neq 0 \text{ et } A'Y' = \lambda Y' \\
&\Longleftrightarrow \quad (\lambda, Y') \text{ couple propre de } A',
\end{aligned}$$

en posant $Y' \stackrel{\text{def.}}{=} P^{-1}Y$ (non nul car $Y \neq 0$ et P inversible donc $\ker(P) = \{0\}$). Même vp, vec.p modifié par chgt de base.
Si u a pour matrice A dans une base $\mathcal{E}$ et A' dans une base $\mathcal{E}'$, le vecteur propre $\vec{y} \neq 0$ associé à la vp λ, a pour vecteur Y dans $\mathcal{E}$ et $Y' = P^{-1}Y$ dans $\mathcal{E}'$ (P matrice de changement de base, à réviser!).

Diagonalisation 1) Définition

Définition 4.4.1.

Soient A carrée. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si il existe une matrice D diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

Diagonalisation 1) Définition

Définition 4.4.1.

Soient A carrée. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si il existe une matrice D diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

D contient les valeurs propres sur sa diagonale et P est constituée des vecteurs propres en colonnes : $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $P = (Y_1|Y_2|\ldots|Y_n)$ (i.e. $P_j = Y_j$), où $AY_j = \lambda_j Y_j$ pour $j = 1, \ldots, n$.

Diagonalisation 1) Définition

Définition 4.4.1.

Soient A carrée. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si il existe une matrice D diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

D contient les valeurs propres sur sa diagonale et P est constituée des vecteurs propres en colonnes : $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $P = (Y_1|Y_2|\ldots|Y_n)$ (i.e. $P_j = Y_j$), où $AY_j = \lambda_j Y_j$ pour $j = 1, \ldots, n$.

Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables.

Contre-exemple : $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. B admet λ comme vp double. Si il existait P inversible tq $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = P^{-1}BP$, alors on aurait $B = P\lambda I_2 P^{-1} = \lambda I_2$, ce qui est manifestement faux...

Diagonalisation 2) 1ère CNS

Théorème 4.4.1.

A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$.

Diagonalisation 2) 1ère CNS

Théorème 4.4.1.

A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
A \text{ diagonalisable} \quad &\iff \quad \exists D \text{ diagonale}, \ \exists P \text{ inversible, tq } D = P^{-1}AP \\
&\iff \quad \exists D \text{ diagonale}, \ \exists P \text{ inversible, tq } PD = AP \\
&\iff \quad \exists (d_j)_j, \ \exists (P_j)_j \text{ libre tq } \forall j \ AP_j = d_j P_j \\
&\iff \quad \exists \{Y_1 \dots Y_n\} \text{ base de } \mathbb{K}^n \text{ tq } \forall j \ AY_j = \lambda_j Y_j
\end{aligned}$$

Diagonalisation 2) 1ère CNS

Théorème 4.4.1.

A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$.

Preuve :

$$
\begin{aligned}
A \text{ diagonalisable} &\iff \exists D \text{ diagonale, } \exists P \text{ inversible, tq } D = P^{-1}AP \\
&\iff \exists D \text{ diagonale, } \exists P \text{ inversible, tq } PD = AP \\
&\iff \exists (d_j)_j,\ \exists (P_j)_j \text{ libre tq } \forall j\ AP_j = d_j P_j \\
&\iff \exists \{Y_1 \dots Y_n\} \text{ base de } \mathbb{K}^n \text{ tq } \forall j\ AY_j = \lambda_j Y_j
\end{aligned}
$$

Pour tous $j \in \{1, \dots, n\}$, les colonnes de P sont bien les vecteurs propres Y_j associés aux vp λ_j.
Les termes diagonaux de D sont bien les vp.

Table of contents

1. Préambule

2. Définitions des valeurs propres

3. Polynôme caractéristique et valeurs propres

4. Diagonalisation

5. Vecteurs propres, sous-espaces propres
   5a) Somme directe de seV propres
   5b) Matrices par blocs et dimensions des seV propres
   5b) 2ème CNS de diagonalisation

4. Trigonalisation, jordanisation

5. Cayley-Hamilton

Vecteurs propres libres si associés à des vp distinctes

Proposition 4.3.2.

Soit $q \geq 1$. Soient q vecteurs propres $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ de A, associés à q vp distinctes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$.
Alors la famille $(y_k)_{k=1,\ldots,q}$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

Vecteurs propres libres si associés à des vp distinctes

Proposition 4.3.2.

Soit $q \geq 1$. Soient q vecteurs propres $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ de A, associés à q vp distinctes $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$.
Alors la famille $(y_k)_{k=1,\dots,q}$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

Preuve : par récurrence sur q.
Si $q = 1$: soit $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ tq $\alpha_1 y_1 = 0$. Comme y_1 est vecteur propre, il est non-nul, donc $\alpha_1 = 0$ et (y_1) est libre.

Vecteurs propres libres si associés à des vp distinctes

Proposition 4.3.2.

Soit $q \geq 1$. Soient q vecteurs propres $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ de A, associés à q vp distinctes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$.
Alors la famille $(y_k)_{k=1,\ldots,q}$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

Preuve : par récurrence sur q.
Si $q = 1$: soit $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ tq $\alpha_1 y_1 = 0$. Comme y_1 est vecteur propre, il est non-nul, donc $\alpha_1 = 0$ et (y_1) est libre.
Si vrai pour q, alors : soit $(\alpha_k)_{k=1,\ldots,q+1}$ tq $\sum_{i=1}^{q+1} \alpha_k y_k = 0$. On a donc : $\alpha_{q+1} y_{q+1} = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_k y_k$. En appliquant A, linéaire, et en utilisant le fait que y_k est vecteur propre, on obtient
$A\alpha_{q+1} y_{q+1} = \lambda_{q+1} \alpha_{q+1} y_{q+1} = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_k A y_k = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_k \lambda_k y_k$.

Vecteurs propres libres si associés à des vp distinctes

Proposition 4.3.2.

Soit $q \geq 1$. Soient q vecteurs propres $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ de A, associés à q vp distinctes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$.
Alors la famille $(y_k)_{k=1,\ldots,q}$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

Preuve : par récurrence sur q.
Si $q = 1$: soit $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ tq $\alpha_1 y_1 = 0$. Comme y_1 est vecteur propre, il est non-nul, donc $\alpha_1 = 0$ et (y_1) est libre.
Si vrai pour q, alors : soit $(\alpha_k)_{k=1,\ldots,q+1}$ tq $\sum_{i=1}^{q+1} \alpha_k y_k = 0$. On a donc : $\alpha_{q+1} y_{q+1} = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_k y_k$. En appliquant A, linéaire, et en utilisant le fait que y_k est vecteur propre, on obtient
$A\alpha_{q+1} y_{q+1} = \lambda_{q+1}\alpha_{q+1} y_{q+1} = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_k A y_k = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_k \lambda_k y_k$.Donc, $\lambda_{q+1}(-\sum_{i=1}^{q} \alpha_k y_k) = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_k \lambda_k y_k$, soit $\sum_{i=1}^{q} \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{q+1}) y_k = 0$.
D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(y_k)_{k=1,\ldots,q}$ est libre, donc $\forall k \leq q$, $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{q+1}) = 0$ et donc comme les vp sont distinctes, $\alpha_k = 0$. $\alpha_{q+1} y_{q+1} = 0$ et $y_{q+1} \neq 0$ implique que $\alpha_{q+1} = 0$ aussi, donc $(y_k)_{k=1,\ldots,q+1}$ est libre.

Somme directe : généralisation à $p \geq 2$ seV

Voir exercice 2 du médian P25.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ $p \geq 2$ seV de E.
On définit la somme des seV :
$G = \sum_{j=1}^{p} F_j \overset{\text{def.}}{=} \left\{ x \in E \mid \forall j = 1, \ldots, p \; \exists f_j \in F_j \text{ et } x = \sum_{j=1}^{p} f_j \right\}$,
tout vecteur de G se décompose comme une somme de vecteurs de F_j.

Somme directe : généralisation à $p \geq 2$ seV

Voir exercice 2 du médian P25.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ $p \geq 2$ seV de E.
On définit la somme des seV :
$G = \sum_{j=1}^{p} F_j \overset{\text{def.}}{=} \left\{ x \in E \mid \forall j = 1, \ldots, p \ \exists f_j \in F_j \text{ et } x = \sum_{j=1}^{p} f_j \right\}$,
tout vecteur de G se décompose comme une somme de vecteurs de F_j.
$\rightarrow$ G est un seV de E.

Somme directe : généralisation à $p \geq 2$ seV

Voir exercice 2 du médian P25.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ $p \geq 2$ seV de E.
On définit la somme des seV :
$G = \sum_{j=1}^{p} F_j \overset{\text{def.}}{=} \left\{ x \in E \mid \forall j = 1, \ldots, p \; \exists f_j \in F_j \text{ et } x = \sum_{j=1}^{p} f_j \right\}$,
tout vecteur de G se décompose comme une somme de vecteurs de F_j.
$\rightarrow$ G est un seV de E.

$\rightarrow$ G est une somme directe notée $G = \bigoplus_{k=1}^{p} F_j$

- ssi la décomposition est unique :

$$\forall g \in G \; \exists! (f_i)_{i \in \{1,\ldots,p\}} \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ tq. } g = \sum_{i=1}^{p} f_i,$$

Somme directe : généralisation à $p \geq 2$ seV

Voir exercice 2 du médian P25.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ $p \geq 2$ seV de E.
On définit la somme des seV :
$G = \sum_{j=1}^{p} F_j \overset{\text{def.}}{=} \left\{ x \in E \mid \forall j = 1, \ldots, p \; \exists f_j \in F_j \text{ et } x = \sum_{j=1}^{p} f_j \right\}$,
tout vecteur de G se décompose comme une somme de vecteurs de F_j.
$\rightarrow$ G est un seV de E.

$\rightarrow$ G est une somme directe notée $G = \bigoplus_{k=1}^{p} F_j$

- ssi la décomposition est unique :

$$\forall g \in G \; \exists! (f_i)_{i \in \{1, \ldots, p\}} \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ tq. } g = \sum_{i=1}^{p} f_i,$$

- ssi $G = \sum_{j=1}^{p} F_j$ et $\forall i \in \{1, \ldots, p\}, F_i \cap \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{p} F_j \right) = \{0\}$.

Somme directe : généralisation à $p \geq 2$ seV

Voir exercice 2 du médian P25.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ $p \geq 2$ seV de E.
On définit la somme des seV :
$G = \sum_{j=1}^{p} F_j \overset{\text{def.}}{=} \left\{ x \in E \mid \forall j = 1, \dots, p \ \exists f_j \in F_j \text{ et } x = \sum_{j=1}^{p} f_j \right\}$,
tout vecteur de G se décompose comme une somme de vecteurs de F_j.
$\rightarrow$ G est un seV de E.

$\rightarrow$ G est une somme directe notée $G = \bigoplus_{k=1}^{p} F_j$

- ssi la décomposition est unique :

$$\forall g \in G \ \exists ! (f_i)_{i \in \{1,\dots,p\}} \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ tq. } g = \sum_{i=1}^{p} f_i,$$

- ssi $G = \sum_{j=1}^{p} F_j$ et $\forall i \in \{1, \dots, p\}, F_i \cap \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{p} F_j \right) = \{0\}$.

Dans ce cas, on a $\dim(\bigoplus_{k=1}^{p} F_j) = \sum_{j=1}^{p} \dim(F_j)$.

Somme directe : généralisation à $p \geq 2$ seV

Attention : avoir $\forall i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0\}$ ne suffit pas pour être en somme directe (si $p \geq 3$).

- Exemple ($p = 3$) : $E = \mathbb{R}^2$,
  $F_1 = \text{Vect}([1,0]^T)$, $F_2 = \text{Vect}([0,1]^T)$ et $F_3 = \text{Vect}([1,1]^T)$.
  On a $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_3 \cap F_1 = \{0\}$.
  On a $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2 + F_3$, mais ce n'est pas une somme directe.
  Par ex. :
  $\vec{x} = [x_1, x_2]^T = x_1 \vec{f_1} + x_2 \vec{f_2} + 0 \vec{f_3} = (x_1 - x_2) \vec{f_1} + 0 \vec{f_2} + x_2 \vec{f_3}$.

Somme directe : généralisation à $p \geq 2$ seV

Attention : avoir $\forall i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0\}$ ne suffit pas pour être en somme directe (si $p \geq 3$).

- Exemple ($p = 3$) : $E = \mathbb{R}^2$,
  $F_1 = \text{Vect}([1,0]^T)$, $F_2 = \text{Vect}([0,1]^T)$ et $F_3 = \text{Vect}([1,1]^T)$.
  On a $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_3 \cap F_1 = \{0\}$.
  On a $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2 + F_3$, mais ce n'est pas une somme directe.
  Par ex. :
  $\vec{x} = [x_1, x_2]^T = x_1\vec{f_1} + x_2\vec{f_2} + 0\vec{f_3} = (x_1 - x_2)\vec{f_1} + 0\vec{f_2} + x_2\vec{f_3}$.
  Et on a $F_1 \oplus F_2 = F_2 \oplus F_3 = F_3 \oplus F_1 = \mathbb{R}^2$ (car on a somme directe et égalité des dimensions à chaque fois). Donc
  $F_1 \cap (F_2 + F_3) = F_1 \cap \mathbb{R}^2 = F_1 \neq \{0\}\dots$

Sous-espaces propres

Définition 4.3.1

Soit λ une vp pour A. On appelle sous-espace propre $V_\lambda \overset{\text{def.}}{=} \ker(A - \lambda I_n)$ $(= \{y \in \mathbb{K}^n \mid Ay = \lambda y\})$.
On note $d_\lambda = \dim(V_\lambda)$.

$\rightarrow$ V_λ est évidemment un seV (c'est le noyau d'une application linéaire),
$\rightarrow$ V_λ est constitué des vecteurs propres associés à la vp λ et du vecteur nul (qui n'est pas vect.pr.).

Sous-espace propres de valeurs propres distinctes

Proposition C.1.1.

Soit $q \geq 1$, et soient $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ q vp distinctes pour A.
Alors les seV propres associés sont en somme directe :
$\bigoplus_{k=1}^{q} V_{\mu_k}$, seV de $\mathbb{K}^n$, et $\dim(\bigoplus_{k=1}^{q} V_{\mu_k}) = \sum_{k=1}^{q} d_{\mu_k}$ $(\leq n)$.

Sous-espace propres de valeurs propres distinctes

Proposition C.1.1.

Soit $q \geq 1$, et soient $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ q vp distinctes pour A. Alors les seV propres associés sont en somme directe :

$$\bigoplus_{k=1}^{q} V_{\mu_k}, \text{ seV de } \mathbb{K}^n, \text{ et } \dim(\bigoplus_{k=1}^{q} V_{\mu_k}) = \sum_{k=1}^{q} d_{\mu_k} \ (\leq n).$$

Preuve : on pose $H = \sum_{k=1}^{q} V_{\mu_k}$. C'est un seV de $\mathbb{K}^n$. Il reste à montrer que la somme directe.
Soit $y \in H$. Supposons que $\forall k = 1, \ldots, q$, il existe v_k et v'_k dans V_{μ_k} (donc tq $Av_k = \mu_k v_k$ et $Av'_k = \mu_k v'_k$) satisfaisant
$y = \sum_{k=1}^{q} v_k = \sum_{k=1}^{q} v'_k$.
Par différence, on a $\sum_{k=1}^{q}(v_k - v'_k) = 0$. Comme $w_k \stackrel{\text{def.}}{=} v_k - v'_k$ est dans V_{μ_k} (seV), les w_k sont donc soit des vecteurs propres associés à des vp distinctes, soit 0.
Comme $(w_k)_{k=1,\ldots,q}$ est liée, elle ne peut pas contenir de vecteurs propres : tous les w_k sont nuls. Donc il y a unicité de la décomposition de y dans H.

Matrices par blocs

Voir exercice A.2.4 du chapitre 3.

- Si $A \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_K, p_1+p_2+\cdots+n_L}$, on peut décomposer A par blocs :
  pour $i = 1, \ldots, K$ et $j = 1, \ldots, L$: $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, n_j}$ ($K \times L$ blocs).
- Si $B \in \mathcal{M}_{p_1+p_2+\cdots+n_L, q_1+q_2+\cdots+q_M}$, on peut faire le produit $C = AB$ par blocs :

  Pour $i = 1, \ldots, K$ et $j = 1, \ldots, M$: $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{L} A_{i,k} B_{k,j}$,

  où $C_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, q_j}$. (Attention : produit non commutatif!)
- Si $K = L$ (même nb de blocs), si $n_i = p_i$ pour $i = 1, \ldots, K$ (blocs diagonaux carrés), et si A est triangulaire par blocs, alors le déterminant est le produit des déterminants des blocs diagonaux,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{K} \det(A_{i,i}).$$

Matrices par blocs : exemple 1

- Produit par blocs : si
  $A_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}, A_{1,2} \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}, A_{2,1} \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}, A_{2,2} \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}$, et
  $B_{1,1} \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}, \ldots, B_{2,2} \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}, B_{2,3} \in \mathcal{M}_{p_2,q_3}$,
  $$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{pmatrix},$$
  alors $AB \in \mathcal{M}_{n_1+n_2,q_1+q_2+q_3}$ tq

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} & A_{1,1}B_{1,3} + A_{1,2}B_{2,3} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} & A_{2,1}B_{1,3} + A_{2,2}B_{2,3} \end{pmatrix}.$$

Matrices par blocs : exemple 1

- Produit par blocs : si
  $A_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}, A_{1,2} \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}, A_{2,1} \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}, A_{2,2} \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}$, et
  $B_{1,1} \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}, \ldots, B_{2,2} \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}, B_{2,3} \in \mathcal{M}_{p_2,q_3}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{pmatrix},$$

  alors $AB \in \mathcal{M}_{n_1+n_2,q_1+q_2+q_3}$ tq

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} & A_{1,1}B_{1,3} + A_{1,2}B_{2,3} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} & A_{2,1}B_{1,3} + A_{2,2}B_{2,3} \end{pmatrix}.$$

  $\rightarrow$ Attention : produit matriciel non commutatif.
  Ex : $A_{1,2}B_{2,1}$: OK ($\mathcal{M}_{n_1,p_2} \times \mathcal{M}_{p_2,q_1} \rightarrow \mathcal{M}_{n_1,q_1}$).
  Mais "$B_{2,1}A_{1,2}$" n'a en général pas de sens ("$\mathcal{M}_{p_2,q_1} \times \mathcal{M}_{n_1,p_2}$").

Matrices par blocs : exemple 1

- Produit par blocs : si
  $A_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}$, $A_{1,2} \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}$, $A_{2,1} \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}$, $A_{2,2} \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}$, et
  $B_{1,1} \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}, \ldots, B_{2,2} \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}, B_{2,3} \in \mathcal{M}_{p_2,q_3}$,

  $$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \end{pmatrix},$$

  alors $AB \in \mathcal{M}_{n_1+n_2, q_1+q_2+q_3}$ tq

  $$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} & A_{1,1}B_{1,3} + A_{1,2}B_{2,3} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} & A_{2,1}B_{1,3} + A_{2,2}B_{2,3} \end{pmatrix}.$$

  $\rightarrow$ Attention : produit matriciel non commutatif.
  Ex : $A_{1,2}B_{2,1}$: OK ($\mathcal{M}_{n_1,p_2} \times \mathcal{M}_{p_2,q_1} \rightarrow \mathcal{M}_{n_1,q_1}$).
  Mais "$B_{2,1}A_{1,2}$" n'a en général pas de sens ("$\mathcal{M}_{p_2,q_1} \times \mathcal{M}_{n_1,p_2}$").
- Transposée : échanger les blocs et les transposer

  $$B^T = \begin{pmatrix} B_{1,1}^T & B_{2,1}^T \\ B_{1,2}^T & B_{2,2}^T \\ B_{1,3}^T & B_{2,3}^T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_1+q_2+q_3, p_1+p_2}.$$

Matrices par blocs : exemple 2

Matrices triangulaire par blocs :

- Déterminant : si $A_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1,n_1}, A_{1,2} \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}, 0 \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}, A_{2,2} \in \mathcal{M}_{n_2,n_2}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \det(A_{1,1}) \det(A_{2,2}).$$

Matrices par blocs : exemple 2

Matrices triangulaire par blocs :

- Déterminant : si $A_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1,n_1}, A_{1,2} \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}, 0 \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}, A_{2,2} \in \mathcal{M}_{n_2,n_2}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} \implies \det(A) = \det(A_{1,1}) \det(A_{2,2}).$$

  $\rightarrow$ Attention : il faut que les blocs diagonaux soient carrés.

  Même résultat pour une matrice triangulaire inférieure par blocs.

- Si en plus $\det(A_{1,1}) \det(A_{2,2}) \neq 0$, alors A inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & -A_{1,1}^{-1} A_{1,2} A_{2,2}^{-1} \\ 0 & A_{2,2}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Multiplicité et dimension de sous-espace propre

Proposition C.1.2.

Soit λ une vp pour A. Alors la dimension du seV propre V_λ est inférieure ou égale à sa multiplicité : $d_\lambda \leq r_\lambda$.

Multiplicité et dimension de sous-espace propre

Proposition C.1.2.

Soit λ une vp pour A. Alors la dimension du seV propre V_λ est inférieure ou égale à sa multiplicité : $d_\lambda \leq r_\lambda$.

Preuve : Soit $\{y_1, \dots y_{d_\lambda}\}$ une base de V_λ (donc libre dans $\mathbb{K}^n$); les $(y_j)_{1\leq j\leq d_\lambda}$ sont des vecteurs propres.

On la complète en une base de $\mathbb{K}^n$, notée $\mathcal{B}' \overset{\text{def.}}{=} \{y_1, \dots, y_n\}$.
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$, définie par $u(x) = Ax$. Dans la base canonique $\mathcal{B}$, u admet A pour matrice. Dans la base $\mathcal{B}'$, u admet pour matrice

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & \widetilde{C} \\ 0 & 0 & \lambda & \\ 0 & 0 & 0 & C' \end{pmatrix}, \quad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{C} \in \mathcal{M}_{d_\lambda, n-d_\lambda}, \\ C' \in \mathcal{M}_{n-d_\lambda, n-d_\lambda}, \end{array} \right.$$

car $u(y_j) = \lambda y_j$ pour $j \leq d_\lambda$. A et A' sont semblables $\rightarrow$ elles ont même polynôme caractéristique. De plus, comme A' est triangulaire par blocs, on obtient $\Pi_A(s) = \Pi_{A'}(s) = \det(sI_n - A') = (\lambda - s)^{d_\lambda} \det(C' - sI_{n-d_\lambda})$.

2ème CNS de diagonalisation

Théorème 4.4.2.

A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si A admet p valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ vérifiant
$\forall k = 1...p,\ d_k = r_k$ et $\sum_{k=1}^{p} r_k = n$,
(ou, ce qui est équivalent, $\sum_{k=1}^{p} d_k = n$).

2ème CNS de diagonalisation

Théorème 4.4.2.

A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si A admet p valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ vérifiant
$\forall k = 1...p,\ d_k = r_k$ et $\sum_{k=1}^{p} r_k = n$,
(ou, ce qui est équivalent, $\sum_{k=1}^{p} d_k = n$).

Preuve : on a toujours $V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_p} \subset \mathbb{K}^n$. Il vient

$$
\begin{aligned}
A \text{ diagonalisable} \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists D \text{ diagonale, } \exists P \text{ inversible, tq } D = P^{-1}AP \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists \{Y_1 \ldots Y_n\} \text{ base de } \mathbb{K}^n \text{ tq } \forall j = 1...n\ AY_j = \lambda_j Y_j \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K}^n = V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_p} \\
& \Longleftrightarrow \quad n = \dim(V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_p}) \\
& \Longleftrightarrow \quad n = \dim(V_{\mu_1}) + \dim(V_{\mu_2}) + \cdots + \dim(V_{\mu_p}) \\
& \Longleftrightarrow \quad n = \sum_{k=1}^{p} d_k \Longleftrightarrow \{\forall k = 1...p\ \ d_k = r_k \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^{p} r_k = n\}
\end{aligned}
$$

car $\forall k\ d_k \leq r_k$.

CS de diagonalisation

Proposition 4.4.1.

Si A admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

CS de diagonalisation

Proposition 4.4.1.

Si A admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

Preuve : car dans ce cas, $p = n$, et comme $\forall k \leq n$, $1 \leq d_k \leq r_k$, nécessairement $n \leq \sum_{k=1}^{n} d_k \leq \sum_{k=1}^{n} r_k \leq n$ implique l'égalité (et donc $d_k = r_k = 1$ pour tous k).

Table of contents

1. Préambule
2. Définitions des valeurs propres
3. Polynôme caractéristique et valeurs propres
4. Diagonalisation
5. Vecteurs propres, sous-espaces propres
   5a) Somme directe de seV propres
   5b) Matrices par blocs et dimensions des seV propres
   5b) 2ème CNS de diagonalisation
4. Trigonalisation, jordanisation
5. Cayley-Hamilton

Trigonalisation 1)

Théorème 4.4.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe P inversible et T triangulaire (supérieure) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $T = P^{-1}AP$, A est trigonalisable (ou triangularisable) dans $\mathbb{C}$.

Trigonalisation 1)

Théorème 4.4.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe P inversible et T triangulaire (supérieure) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $T = P^{-1}AP$, A est trigonalisable (ou triangularisable) dans $\mathbb{C}$.

Remarque : T est semblable à A, donc ont même polynôme caractéristique, donc même vp. Comme T est triangulaire, $\Pi_A(s) = \Pi_T(s) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - s)$, donc les vp de A sont les termes diagonaux de T ($\forall i,\ \lambda_i = t_{ii}$).

Trigonalisation 1)

Théorème 4.4.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe P inversible et T triangulaire (supérieure) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $T = P^{-1}AP$, A est trigonalisable (ou triangularisable) dans $\mathbb{C}$.

Remarque : T est semblable à A, donc ont même polynôme caractéristique, donc même vp. Comme T est triangulaire, $\Pi_A(s) = \Pi_T(s) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - s)$, donc les vp de A sont les termes diagonaux de T ($\forall i,\ \lambda_i = t_{ii}$).

Remarque : si toutes les vp sont réelles, on peut prendre P et T dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trigonalisation 1)

Théorème 4.4.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe P inversible et T triangulaire (supérieure) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $T = P^{-1}AP$, A est trigonalisable (ou triangularisable) dans $\mathbb{C}$.

Remarque : T est semblable à A, donc ont même polynôme caractéristique, donc même vp. Comme T est triangulaire, $\Pi_A(s) = \Pi_T(s) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - s)$, donc les vp de A sont les termes diagonaux de T ($\forall i,\ \lambda_i = t_{ii}$).

Remarque : si toutes les vp sont réelles, on peut prendre P et T dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Preuve : par récurrence sur n.

Trigonalisation 2)

Théorème 4.4.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe P inversible et T triangulaire (supérieure) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $T = P^{-1}AP$.

Preuve : par récurrence sur n.

- $n = 1$: rien à faire ($P = [1]$ et $T = A$).
- $n = 2$: soit (λ, y) un couple propre pour A (dans $\mathbb{C}$). Comme $y \neq 0$, $\{y\}$ est une famille libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = \{y, z\}$ de $\mathbb{C}^2$. On pose $P = [y|z] \in \mathcal{M}_2$ la matrice de changement de base (de la base canonique $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$, $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$), et on pose $T = P^{-1}AP$. On a $Ay = \lambda y$, donc $T = \begin{pmatrix} \lambda & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}$ (où $Az = t_{12}y + t_{22}z$).

Trigonalisation 2bis)

Preuve : (récurrence, suite) si vrai pour n, alors soit (λ, y) un couple propre pour A (dans $\mathbb{C}$). Comme $y \neq 0$, $\{y\}$ est une famille libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = \{y, z_2, \ldots, z_n\}$ de $\mathbb{C}^n$. On pose $Q = [y|z_2|\ldots|z_n] \in \mathcal{M}_n$ la matrice de changement de base (de la base canonique $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$, $Q = Q_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$), et on pose $S = Q^{-1}AQ$. On a $Ay = \lambda y$, donc dans la base $\mathcal{B}$

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & s^T \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix}, \quad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} s \in \mathcal{M}_{n-1,1} \text{ et} \\ \hat{S} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}. \end{array} \right.$$

Trigonalisation 2bis)

Preuve : (récurrence, suite) si vrai pour n, alors soit (λ, y) un couple propre pour A (dans $\mathbb{C}$). Comme $y \neq 0$, $\{y\}$ est une famille libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = \{y, z_2, \dots, z_n\}$ de $\mathbb{C}^n$. On pose $Q = [y|z_2|\dots|z_n] \in \mathcal{M}_n$ la matrice de changement de base (de la base canonique $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$, $Q = Q_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$), et on pose $S = Q^{-1}AQ$. On a $Ay = \lambda y$, donc dans la base $\mathcal{B}$

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & s^T \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} s \in \mathcal{M}_{n-1,1} \text{ et} \\ \hat{S} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}. \end{array} \right.$$

Hyp. récurrence pour $\hat{S}$: dans $\mathcal{M}_{n-1}$ il existe $\hat{T}$ triangulaire et $\hat{P}$ inversible tq $\hat{T} = \hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P} \end{pmatrix}$, (d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P}^{-1} \end{pmatrix}$).

Donc $T \stackrel{\text{def.}}{=} P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & s^T \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & s^T\hat{P} \\ 0 & \hat{P}^{-1}\hat{S}\hat{P} \end{pmatrix}$,

soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & s^T\hat{P} \\ 0 & \hat{T} \end{pmatrix}$ triangulaire. Finalement avec $R \stackrel{\text{def.}}{=} QP$ inversible,

$T = P^{-1}SP = P^{-1}(Q^{-1}AQ)P = (QP)^{-1}A(QP) = R^{-1}AR.$

Table of contents

1. Préambule

2. Définitions des valeurs propres

3. Polynôme caractéristique et valeurs propres

4. Diagonalisation

5. Vecteurs propres, sous-espaces propres
   5a) Somme directe de seV propres
   5b) Matrices par blocs et dimensions des seV propres
   5b) 2ème CNS de diagonalisation

4. Trigonalisation, jordanisation

5. Cayley-Hamilton

Cayley-Hamilton

Théorème 4.5.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A annule son polynôme caractéristique : $\Pi_A(A) = 0$ (dans $\mathcal{M}_n$).
En notant $\Pi_A(s) = (-1)^n[s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n]$, alors
$\Pi_A(A) = (-1)^n[A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I_n] = 0$.

Cayley-Hamilton

Théorème 4.5.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A annule son polynôme caractéristique : $\Pi_A(A) = 0$ (dans $\mathcal{M}_n$).
En notant $\Pi_A(s) = (-1)^n[s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n]$, alors
$\Pi_A(A) = (-1)^n[A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I_n] = 0$.

Preuve (partielle) : pour simplifier, on suppose que A est diagonalisable.

Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors $\forall i \geq 0$, $A^{n+i} \in \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ (dans $\mathcal{M}_n$).