MT12 - P2025 - Examen médian

Durée 1h30 – **Les documents et machines à calculer sont interdits**

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème : 6 points*)(Questions de cours)

1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \, : \, E \times E &\to \mathbb{R}, \\ (P, Q) &\mapsto \int_{-1}^{1} P(x)\, Q(x)\, dx. \end{aligned} \tag{1}$$

   Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Soit g une fonction continue par morceaux, a-périodique (pour $a > 0$) et impaire. Montrer que

$$\int_0^a g(t)\, dt = 0.$$

   En déduire que si f est une fonction continue par morceaux, a-périodique et impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire également que si f est une fonction continue par morceaux, a-périodique et paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$

3. Soit f une fonction continue par morceaux et a-périodique (pour $a > 0$). Rappeler (sans démonstration) l'inégalité de Bessel vérifiée par f.

Exercice 2 (*barème : 6 points*)(Exercice de synthèse)(**Changez de copie !**)

1. Soit f la fonction 2-périodique définie par

$$f(t) = 1 - t^2 \quad \text{si } t \in]-1, 1].$$

   (a) Dessiner le graphe de f. Préciser la valeur de t où f atteint son maximum sur $]-1, 1]$. (1 point)

   (b) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$. (1 point)

   (c) On note f_N la somme partielle d'ordre $N \geq 1$ de la série de Fourier de f. Déduire de la question précédente l'expression de f_N. (0.5 point)

   (d) Est-ce que la suite des sommes partielles $(f_N)_{N \geq 1}$ de la série de Fourier de f converge simplement (ou ponctuellement) vers f sur $\mathbb{R}$? **Justifier** soigneusement votre réponse. (1.5 points)

   (e) Justifier les relations (2 point)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Tournez la page

Exercice 3 (*barème : 8 points*)(Procédé de Gram-Schmidt)(**Changez de copie !**)

Dans cet exercice on considère $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ doté d'une base $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{n-1})$. On veut dans un premier temps construire à partir des éléments de $\mathcal{B}$ une famille $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ orthonormale, pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, vérifiant

$$\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_k) \qquad \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Pour ce faire on va utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Dans la suite on note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Pour $k = 0$, justifier que le vecteur $u_0 = e_0/\|e_0\|$ vérifie $\|u_0\| = 1$. (0.25 point)
2. Pour $k = 1$, on cherche à construire un vecteur v_1 **orthogonal** à u_0.
   (a) Pour ce faire on cherche v_1 sous la forme $v_1 = e_1 + \alpha_0 u_0$. Démontrer que si $\alpha_0 = -\langle u_0, e_1 \rangle$ alors v_1 est orthogonal à u_0. (0.5 point)
   (b) En raisonnant par l'absurde, justifier que $v_1 \neq 0$. (0.25 point)
   (c) On pose à présent $u_1 = v_1/\|v_1\|$. Justifier que $\langle u_1, u_0 \rangle = 0$ et $\|u_1\| = 1$. (0.5 point)
   (d) Justifier que $\mathrm{Vect}(e_0, e_1) = \mathrm{Vect}(u_0, u_1)$. (0.5 point)
3. Soit $k \in \{1, \ldots, n-2\}$, on cherche à construire un vecteur v_{k+1} **orthognal** aux vecteurs $(u_0, \ldots, u_k)$. Bien etendu, on itère le processus précédent et on suppose que la famille $(u_0, \ldots, u_k)$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et que

$$\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_k).$$

   (a) On cherche v_{k+1} sous la forme

$$v_{k+1} = e_{k+1} + \sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell \, u_\ell.$$

   En s'inspirant de la question 2(a), pour tout $\ell \in \{0, \ldots, k\}$, trouver les expressions des coefficients α_ℓ telles que v_{k+1} soit orthogonale à la famille $(u_0, \ldots, u_k)$.(1.5 point)
   (b) Justifier que $v_{k+1} \neq 0$. (0.5 point)
   (c) En déduire la définition du vecteur u_{k+1}. (0.5 point)
   (d) Justifier que $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_{k+1}) = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_{k+1})$. (0.5 point)
4. Dans la suite de l'exercice on considère $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels muni du produit scalaire (1).
   (a) Donner la définition de la norme, notée $\|\cdot\|$, associée au produit scalaire (1). (0.5 point)
   (b) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt rappelé précédemment, construire à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, donnée par $(1, X, X^2)$, une famille (L_0, L_1, L_2) orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire (1) vérifiant : (2.5 points)

$$\mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathrm{Vect}(L_0, L_1, L_2).$$

On peut bien entendu étendre cette construction à $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$. En partant de $(1, X, \ldots, X^n)$ on construit alors la famille des polynômes orthogonaux de Legendre.