

MT12 - P2025 - Examen final

Durée 2h00 – **Les documents et machines à calculer sont interdits**

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème : 6 points*)(Questions de cours)

1. Soit $N \geq 1$. On note S_N la matrice représentant l'application de Transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_N$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$. Rappeler la définition de l'inverse de la matrice S_N et donner la définition de ses coefficients.
2. Rappeler l'énoncé du théorème de convergence dominée de Lebesgue. On considère ensuite la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ avec $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ pour $x \in [1, +\infty[$. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x) dx.$$

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que f admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n \geq 1$ qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Prouver que dans ce cas, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^n}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

On précisera la définition de la constante C .

Exercice 2 (*barème : 6 points*)(Exercice de synthèse)(**Changez de copie !**)

1. Soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$.
 - (a) Justifier que $f_a \in L^1(\mathbb{R})$.
 - (b) Calculer la transformée de Fourier de f_a .
 - (c) En déduire la transformée de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- (d) En déduire la transformée de Fourier des fonctions :

$$h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad \text{et} \quad p(x) = \frac{1}{1+(x-2)^2}.$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \pi \mathbf{1}_{[-\alpha, \alpha]}(x)$ avec $\alpha = 1/2\pi$.
 - (a) Justifier que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
 - (b) Calculer $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f .
 - (c) **Bonus.** Est-ce que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$?

Tournez la page

Exercice 3 (*barème : 8 points*)(Autour de l'inversion de la transformée de Fourier)(**Changez de copie !**)

Dans le cours nous avons déjà rencontré des exemples de fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, a priori l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi t\xi} d\xi, \quad (1)$$

n'est pas définie. Cependant, ceci n'exclut pas la possibilité que la limite suivante $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \hat{f}(\xi) e^{2i\pi t\xi} d\xi$, existe. On veut en particulier démontrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec f continûment dérivable sur un nombre **fini** d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \hat{f}(\xi) e^{2i\pi t\xi} d\xi = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \text{p.p. } t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

1. Commençons par quelques propriétés élémentaires.

- (a) D'après un résultat du cours, sous quelle condition sur $\hat{f}$ l'intégrale (1) est définie. Donner la valeur de cette intégrale dans ce cas.
- (b) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ fixés, soit $g(\xi) = e^{2i\pi t\xi} \mathbf{1}_{[-a,a]}(\xi)$. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\hat{g}$.

Indication : Pour ce faire on peut utiliser une proposition du cours.

2. Passons à présent à la preuve du résultat énoncé plus haut. On considère une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec $f' \in L^1(\mathbb{R})$ ainsi que la fonction g définie en 1.(b). Soient $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ fixés, on définit

$$v(a) = \int_{-a}^a e^{2i\pi t\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

- (a) En admettant la formule $v(a) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x) f(x) dx$, démontrer que

$$v(a) = \int_{\mathbb{R}} f(t+u) \frac{\sin(2\pi au)}{\pi u} du.$$

- (b) En déduire que $v(a) = \int_0^{+\infty} (f(t+u) + f(t-u)) \frac{\sin(2\pi au)}{\pi u} du$.

3. On définit à présent, sur $\mathbb{R}$, la fonction **dérivable** $s(y) = \int_y^{+\infty} (\sin(x)/x) dx$. On admet que

$$s'(y) = -\frac{\sin(y)}{y}, \quad s(0) = \pi/2, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} s(y) = 0 \quad \text{et que } s \text{ est bornée sur } [0, +\infty[.$$

on note $M = \sup_{y \geq 0} (|s(y)|)$.

- (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $h_t(u) = f(t+u) + f(t-u)$. Justifier que $h_t \in L^1(\mathbb{R})$.
- (b) Justifier qu'il existe un nombre fini de points $b_0 = 0 < b_1 < \dots < b_q < b_{q+1} = +\infty$ tel que h_t soit continûment dérivable sur $]b_0, b_1[,]b_1, b_2[, \dots,]b_q, b_{q+1}[$.
- (c) Justifier que $h'_t \in L^1(\mathbb{R})$.
- (d) Démontrer la relation suivante

$$v(a) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^q \left[\left(s(2\pi a b_{j+1}) h_t(b_{j+1}^-) - s(2\pi a b_j) h_t(b_j^+) \right) - \int_{b_j}^{b_{j+1}} h'_t(u) s(2\pi au) du \right].$$

- (e) En déduire que $\lim_{a \rightarrow +\infty} v(a) = \frac{1}{\pi} s(0) h_t(0^+) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.

Indication. Utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

4. Dans cette question on considère la fonction f de la question 2 de l'exercice 2. Soit $t \in \mathbb{R}$, déduire des questions précédentes le résultat suivant :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{\sin(\xi)}{\xi} e^{2i\pi t\xi} d\xi = \begin{cases} \pi & \text{si } |t| < \frac{1}{2\pi}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |t| = \frac{1}{2\pi}, \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$