MT12 - P2025 - Examen final

Durée 2h00 – **Les documents et machines à calculer sont interdits**

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème : 6 points*)(Questions de cours)

1. Soit $N \geq 1$. On note S_N la matrice représentant l'application de Transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_N$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$. Rappeler la définition de l'inverse de la matrice S_N et donner la définition de ses coefficients.
2. Rappeler l'énoncé du théorème de convergence dominée de Lebesgue. On considère ensuite la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ avec $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ pour $x \in [1, +\infty[$. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que f admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n \geq 1$ qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Prouver que dans ce cas, il existe une constante $C > 0$ telle que
$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^n}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
On précisera la définition de la constante C.

Exercice 2 (*barème : 6 points*)(Exercice de synthèse)(**Changez de copie !**)

1. Soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$.
   (a) Justifier que $f_a \in L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer la transformée de Fourier de f_a.
   (c) En déduire la transformée de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
   (d) En déduire la transformée de Fourier des fonctions :
   $$h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{et} \qquad p(x) = \frac{1}{1+(x-2)^2}.$$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \pi\, \mathbf{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x)$ avec $\alpha = 1/2\pi$.
   (a) Justifier que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f.
   (c) **Bonus.** Est-ce que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$?

Tournez la page

Exercice 3 (*barème : 8 points*)(Autour de l'inversion de la transformée de Fourier)(**Changez de copie !**)
Dans le cours nous avons déjà rencontré des exemples de fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, a priori l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi t\xi}\, d\xi, \tag{1}$$

n'est pas définie. Cependant, ceci n'exclut pas la possibilité que la limite suivante $\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi t\xi}\, d\xi$, existe. On veut en particulier démontrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi t\xi}\, d\xi = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \text{p.p. } t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. Commençons par quelques propriétés élémentaires.
   (a) D'après un résultat du cours, sous quelle condition sur $\hat{f}$ l'intégrale (1) est définie. Donner la valeur de cette intégrale dans ce cas.
   (b) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ fixés, soit $g(\xi) = e^{2i\pi t\xi}\mathbf{1}_{[-a,a]}(\xi)$. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\hat{g}$.
   Indication : Pour ce faire on peut utiliser une proposition du cours.
2. Passons à présent à la preuve du résultat énoncé plus haut. On considère une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec $f' \in L^1(\mathbb{R})$ ainsi que la fonction g définie en 1.(b). Soient $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ fixés, on définit
$$v(a) = \int_{-a}^{a} e^{2i\pi t\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$
   (a) En admettant la formule $v(a) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\, f(x)\, dx$, démontrer que
$$v(a) = \int_{\mathbb{R}} f(t+u)\, \frac{\sin(2\pi a u)}{\pi u}\, du.$$
   (b) En déduire que $v(a) = \int_0^{+\infty} \left(f(t+u) + f(t-u)\right) \frac{\sin(2\pi a u)}{\pi u}\, du$.
3. On définit à présent, sur $\mathbb{R}$, la fonction **dérivable** $s(y) = \int_y^{+\infty} (\sin(x)/x) dx$. On admet que
$$s'(y) = -\frac{\sin(y)}{y},\ s(0) = \pi/2,\ \lim_{y\to+\infty} s(y) = 0 \text{ et que } s \text{ est bornée sur } [0, +\infty[,$$
   on note $M = \sup_{y\geq 0}(|s(y)|)$.
   (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $h_t(u) = f(t+u) + f(t-u)$. Justifier que $h_t \in L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Justifier qu'il existe un nombre fini de points $b_0 = 0 < b_1 < \ldots < b_q < b_{q+1} = +\infty$ tel que h_t soit continûment dérivable sur $]b_0, b_1[$, $]b_1, b_2[$, ..., $]b_q, b_{q+1}[$.
   (c) Justifier que $h_t' \in L^1(\mathbb{R})$.
   (d) Démontrer la relation suivante
$$v(a) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{q} \Big[\Big(s(2\pi a b_{j+1}) h_t(b_{j+1}^-) - s(2\pi a b_j) h_t(b_j^+) \Big) - \int_{b_j}^{b_{j+1}} h_t'(u) s(2\pi a u)\, du \Big].$$
   (e) En déduire que $\lim_{a\to+\infty} v(a) = \frac{1}{\pi} s(0) h_t(0^+) = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$.
   Indication. Utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
4. Dans cette question on considère la fonction f de la question 2 de l'exercice 2. Soit $t \in \mathbb{R}$, déduire des questions précédentes le résultat suivant :
$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, e^{2i\pi\xi t}\, d\xi = \begin{cases} \pi & \text{si } |t| < \frac{1}{2\pi}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } |t| = \frac{1}{2\pi}, \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$