

TD MT12

CHAPITRE 1

Exercice 1.

- (1) Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné, non-dégénéré. Prouver les propriétés suivantes :
- (a) Si f est une fonction R-intégrable sur I alors pour toute constante c la fonction cf est aussi R-intégrable sur I et de plus $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$.
 - (b) Si f et g sont deux fonctions R-intégrables sur I alors la fonction $f + g$ est aussi R-intégrable sur I et de plus $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
 - (c) Si f et g sont deux fonctions R-intégrables sur I vérifiant $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b g(x)dx$.
- (2) Soit f une fonction continue sur I admettant une primitive F (à savoir, il existe une fonction dérivable F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$). Alors,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

n'est pas R-intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 3.

- (1) En utilisant des IPP calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^\pi x \cos(x) dx, \quad \int_0^1 x \arctan(x) dx, \quad \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx.$$

- (2) En utilisant un changement de variable calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}, \quad \int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}.$$

Exercice 4.

- (1) Soit f une fonction continue. On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale de f sur l'intervalle $[0, a]$ (avec $a > 0$). Pour ce faire on utilise la méthode des rectangles à gauche. On considère un entier naturel $N \geq 1$ et une suite équi-répartie de points $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = a$ avec $x_k = ka/N$ pour $k = 0, \dots, N$. Alors on a la formule suivante d'approximation

$$I = \int_0^a f(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = I_N.$$

- (a) Représenter géométriquement la méthode des rectangles à gauche.
 (b) Si f est C^1 monter l'estimation d'erreur suivante :

$$|I - I_N| \leq \frac{a^2}{2N} \sup_{x \in [0, a]} |f'(x)|.$$

- (2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tan\left(\frac{k}{N}\right), \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{N^2 + k^2}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \log\left(\frac{N}{N+k}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = ne^{-nx}$. Montrer que

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Exercice 6. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

- (1) Montrer que si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel doté d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors pour tout $x, y \in E$ on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle},$$

avec égalité si x et y sont colinéaires.

- (2) En déduire que

$$\left| \sum_{i=1}^N x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. Montrer que une famille orthogonale de n vecteurs non-nuls d'un espace euclidien (ou préhilbertien) E est une famille libre.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) montrer que

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

est une norme sur E . Cette norme est-elle induite par un produit scalaire ?

Exercice 9.

- (1) Soit $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b < +\infty$). On considère l'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longrightarrow \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E , en indiquant sa norme associée. En déduire que

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- (2) Soit f une fonction dérivable définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f' vérifie la propriété suivante :

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq M, \quad \text{avec } M \text{ une constante positive.}$$

On considère pour un entier naturel $N \geq 1$ les points $x_k = \frac{k}{N}$, pour $k = 0, \dots, N$ et on note

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|I - I_N| \leq \frac{\alpha}{N}, \quad \text{avec } I = \int_0^1 f(x)dx,$$

en précisant la valeur de α .

Exercice 10.

- (1) Soit $E = C^0([0, 1]; \mathbb{C})$, montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx,$$

est un produit hermitien. Écrire la définition de la norme associée à ce produit hermitien.

- (2) Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit hermitien sur E et $\| \cdot \|$ la norme associée. Montrer que

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$