

Chapitre 2 : Applications linéaires et matrices

Antoine Zurek

LMAC - UTC

1. Applications linéaires

2. Matrices

3. Théorème du rang

Table of contents

1. Applications linéaires

2. Matrices

3. Théorème du rang

Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre E , F et G désignent des e.v. sur un même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire $u : E \rightarrow F$ une application vérifiant :

- ▶ $u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E,$
- ▶ $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K.$

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre E , F et G désignent des e.v. sur un même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire $u : E \rightarrow F$ une application vérifiant :

- ▶ $u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E,$
- ▶ $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K.$

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Exemples : linéaire ou pas ?

- ▶ $u \equiv 0$ (application identiquement nulle),
- ▶ $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $u(x) = \exp(x)$,
- ▶ $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $u(x) = x^2$,
- ▶ $u_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u_1(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$,
- ▶ $u_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec
 $u_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3, 7x_1 - x_2 + 2x_3).$

Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre E , F et G désignent des e.v. sur un même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire $u : E \rightarrow F$ une application vérifiant :

- ▶ $u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E$,
- ▶ $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K$.

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Exemples : linéaire ou pas ?

- ▶ $u \equiv 0$ (application identiquement nulle), oui,
- ▶ $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $u(x) = \exp(x)$, non,
- ▶ $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $u(x) = x^2$, non,
- ▶ $u_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u_1(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$, oui,
- ▶ $u_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3, 7x_1 - x_2 + 2x_3)$, oui.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.

On considère u et $v \in \mathcal{L}(E, F)$. On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 1. $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$ possède une structure de groupe commutatif.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.

On considère u et $v \in \mathcal{L}(E, F)$. On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 1. $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$ possède une structure de groupe commutatif.

De plus pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on définit pour tout $\lambda \in K$ la loi

$$(\lambda u)(x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 2. Cette opération est une loi externe pour $\mathcal{L}(E, F)$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.

On considère u et $v \in \mathcal{L}(E, F)$. On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 1. $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$ possède une structure de groupe commutatif.

De plus pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on définit pour tout $\lambda \in K$ la loi

$$(\lambda u)(x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 2. Cette opération est une loi externe pour $\mathcal{L}(E, F)$.

Conclusion : $\mathcal{L}(E, F)$ muni de ces deux lois est un **espace vectoriel**.
On notera plus simplement dans la suite $\hat{+}$ par $+$.

Composition d'applications linéaires

Proposition 2.1.3.

Si $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$.

Composition d'applications linéaires

Proposition 2.1.3.

Si $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$.

En effet, on considère x et y dans E . Alors on a

$$(u \circ v)(x + y) = u(v(x + y)) = u(\underbrace{v(x) + v(y)}_{\in F}) = u(v(x)) + u(v(y)).$$

D'où $(u \circ v)(x + y) = (u \circ v)(x) + (u \circ v)(y)$ pour tout x et y dans E .

Composition d'applications linéaires

Proposition 2.1.3.

Si $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$.

En effet, on considère x et y dans E . Alors on a

$$(u \circ v)(x + y) = u(v(x + y)) = u(\underbrace{v(x) + v(y)}_{\in F}) = u(v(x)) + u(v(y)).$$

D'où $(u \circ v)(x + y) = (u \circ v)(x) + (u \circ v)(y)$ pour tout x et y dans E .

De plus pour tout $x \in E$ et $\lambda \in K$ on a

$$(u \circ v)(\lambda x) = u(v(\lambda x)) = u(\underbrace{\lambda}_{\in K} \underbrace{v(x)}_{\in F}) = \lambda u(v(x)).$$

D'où $(u \circ v)(\lambda x) = \lambda(u \circ v)(x)$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in K$.

Noyau

Si u est une application linéaire de E dans F ($\mathbb{R}$ e.v.) alors on a **toujours** $u(0_E) = 0_F$. En effet $u(0_E) = u(0_{\mathbb{R}} \cdot x) = 0_{\mathbb{R}} u(x) = 0_F$.

Question. Peut-on avoir $x \neq 0_E$ et pourtant $u(x) = 0_F$?

Noyau

Si u est une application linéaire de E dans F ($\mathbb{R}$ e.v.) alors on a **toujours** $u(0_E) = 0_F$. En effet $u(0_E) = u(0_{\mathbb{R}} \cdot x) = 0_{\mathbb{R}} u(x) = 0_F$.

Question. Peut-on avoir $x \neq 0_E$ et pourtant $u(x) = 0_F$?

Oui ! Par exemple $u_2(1, 3, -2) = (1 + 9 - 10, 7 - 3 - 4) = (0, 0)$.

Définition 2.1.2.

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle **noyau de u** , noté $\ker(u)$, l'ensemble :

$$\ker(u) = \{x \in E : u(x) = 0_F\}.$$

Proposition 2.1.1.

$\ker(u)$ est un **s.e.v. de E** .

Exemple. Soit $u_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$.
Calculer $\ker(u_3)$.

Injectivité et noyau

Rappel Une application u (entre deux ensembles E et F) est injective si ... ?

Injectivité et noyau

Rappel Une application u (entre deux ensembles E et F) est injective si $u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$.

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on peut lier l'injectivité de u et son noyau. En effet :

Théorème 2.1.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶ u est injective,
- ▶ $\ker(u) = \{0_E\}$.

Injectivité et noyau

Rappel Une application u (entre deux ensembles E et F) est injective si $u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$.

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on peut lier l'injectivité de u et son noyau. En effet :

Théorème 2.1.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶ u est injective,
- ▶ $\ker(u) = \{0_E\}$.

Attention ! Cette propriété est fausse si u n'est pas linéaire. En effet, pour $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $u(x) = x^2$ vérifie

$$\ker(u) = \{x \in \mathbb{R} : u(x) = 0\} = \{0\}.$$

Or $u(2) = u(-2)$ donc u n'est pas injective...

Image (et surjectivité)

Définition 2.1.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle image de u , l'ensemble noté $\text{Im}(u)$ et donné par

$$\text{Im}(u) = \{y \in F : \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

Remarque. $\text{Im}(u)$ est un **s.e.v. de F** (à démontrer en exercice).

Exemple. Soit $u_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$.
Calculer $\text{Im}(u_3)$.

Rappel. Une application $u : E \rightarrow F$ est surjective si

Image (et surjectivité)

Définition 2.1.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle image de u , l'ensemble noté $\text{Im}(u)$ et donné par

$$\text{Im}(u) = \{y \in F : \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

Remarque. $\text{Im}(u)$ est un **s.e.v. de F** (à démontrer en exercice).

Exemple. Soit $u_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$.
Calculer $\text{Im}(u_3)$.

Rappel. Une application $u : E \rightarrow F$ est surjective si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$.

Image (et surjectivité)

Définition 2.1.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle image de u , l'ensemble noté $\text{Im}(u)$ et donné par

$$\text{Im}(u) = \{y \in F : \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

Remarque. $\text{Im}(u)$ est un **s.e.v. de F** (à démontrer en exercice).

Exemple. Soit $u_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$.
Calculer $\text{Im}(u_3)$.

Rappel. Une application $u : E \rightarrow F$ est surjective si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$.

Théorème 2.1.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶ u est surjective,
- ▶ $\text{Im}(u) = F$.

Vocabulaire

- ▶ homomorphisme : application linéaire (en gros $\mathcal{L}(E, F)$),
- ▶ endomorphisme : application linéaire de E dans E (en gros $\mathcal{L}(E, E)$ noté $\mathcal{L}(E)$),
- ▶ isomorphisme : application linéaire **bijective**,
- ▶ automorphisme : endomorphisme + isomorphisme,
- ▶ Deux e.v. E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme de E dans F .

Vocabulaire

- ▶ homomorphisme : application linéaire (en gros $\mathcal{L}(E, F)$),
- ▶ endomorphisme : application linéaire de E dans E (en gros $\mathcal{L}(E, E)$ noté $\mathcal{L}(E)$),
- ▶ isomorphisme : application linéaire **bijective**,
- ▶ automorphisme : endomorphisme + isomorphisme,
- ▶ Deux e.v. E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme de E dans F .

Attention. Toute application linéaire entre E et F n'est pas un isomorphisme !

Vocabulaire

- ▶ homomorphisme : application linéaire (en gros $\mathcal{L}(E, F)$),
- ▶ endomorphisme : application linéaire de E dans E (en gros $\mathcal{L}(E, E)$ noté $\mathcal{L}(E)$),
- ▶ isomorphisme : application linéaire **bijective**,
- ▶ automorphisme : endomorphisme + isomorphisme,
- ▶ Deux e.v. E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme de E dans F .

Attention. Toute application linéaire entre E et F n'est pas un isomorphisme !

Proposition 2.1.10.

- ▶ Si u est un isomorphisme alors u^{-1} aussi.

Image d'une famille libre, image d'une famille génératrice

Théorème 2.1.1, Proposition 2.1.6 et Proposition 2.1.7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- ▶ L'image d'une famille liée de E par u est une famille liée de F .
- ▶ Si u est **injective**, l'image d'une famille libre de E par u est une famille libre de F .
- ▶ L'image d'une famille génératrice de E par u est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$.
- ▶ Si u est **surjective**, l'image d'une famille génératrice de E par u est une famille génératrice de F .

Image d'une famille libre, image d'une famille génératrice

Théorème 2.1.1, Proposition 2.1.6 et Proposition 2.1.7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- ▶ L'image d'une famille liée de E par u est une famille liée de F .
- ▶ Si u est **injective**, l'image d'une famille libre de E par u est une famille libre de F .
- ▶ L'image d'une famille génératrice de E par u est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$.
- ▶ Si u est **surjective**, l'image d'une famille génératrice de E par u est une famille génératrice de F .

Corollaire (voir Proposition 2.1.8.)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶ u est bijective ($\ker(u) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(u) = F$),
- ▶ l'image d'une base de E par u est une base de F .

Résumé

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a montré que :

- (a) si $(e_1, \dots, e_n)$ **liée** dans $E \Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **liée** dans F ,
- (b) si $(e_1, \dots, e_n)$ **libre** + u injective $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **libre**,
- (c.1) si $(e_1, \dots, e_n)$ **génératrice** $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **génératrice** de $\text{Im}(u)$,
- (c.2) si u est surjective $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **génératrice** de F .

Résumé

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a montré que :

- (a) si $(e_1, \dots, e_n)$ **liée** dans $E \Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **liée** dans F ,
- (b) si $(e_1, \dots, e_n)$ **libre** + u injective $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **libre**,
- (c.1) si $(e_1, \dots, e_n)$ **génératrice** $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **génératrice** de $\text{Im}(u)$,
- (c.2) si u est surjective $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **génératrice** de F .

Proposition 2.1.9.

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$.

Résumé

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a montré que :

- (a) si $(e_1, \dots, e_n)$ **liée** dans $E \Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **liée** dans F ,
- (b) si $(e_1, \dots, e_n)$ **libre** + u injective $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **libre**,
- (c.1) si $(e_1, \dots, e_n)$ **génératrice** $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **génératrice** de $\text{Im}(u)$,
- (c.2) si u est surjective $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ **génératrice** de F .

Proposition 2.1.9.

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$.

Questions :

- (d) Si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de F est-ce que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E ?
- (e) Si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F est-ce que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans E ?

Projection

Soit $E = F_1 \oplus F_2$, i.e.,

$$\forall x \in E, \exists! x_1 \in F_1, \exists! x_2 \in F_2 \quad \text{tq} \quad x = x_1 + x_2.$$

Définition 2.1.3.

On appelle **projection** sur F_1 parallèlement à F_2 l'**application linéaire** p tq

$$p(x) = x_1.$$

Projection

Soit $E = F_1 \oplus F_2$, i.e.,

$$\forall x \in E, \exists ! x_1 \in F_1, \exists ! x_2 \in F_2 \quad \text{tq} \quad x = x_1 + x_2.$$

Définition 2.1.3.

On appelle **projection** sur F_1 parallèlement à F_2 l'**application linéaire** p tq

$$p(x) = x_1.$$

Proposition

Si p est une projection sur F_1 parallèlement à F_2 alors :

- ▶ $p^2 = p$.
- ▶ $\text{Im}(p) = F_1$.
- ▶ $\text{Ker}(p) = F_2$.

Table of contents

1. Applications linéaires

2. Matrices

3. Théorème du rang

Matrices

Définition.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on appelle matrice de n lignes et p colonnes toute famille $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ d'éléments du corps K . On représente la matrice sous la forme d'un **tableau** :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.

Matrices

Définition.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on appelle matrice de n lignes et p colonnes toute famille $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ d'éléments du corps K . On représente la matrice sous la forme d'un **tableau** :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.

Remarque. Dans la suite on notera plus simplement $\mathcal{M}_{n,p}$.

Vocabulaire (voir Définition 2.2.2.)

- ▶ Si $p = 1$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}$ est appelée **matrice colonne** A_j .
- ▶ Si $n = 1$ une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}$ est appelée **matrice ligne** $\underline{A_j}$.
- ▶ Si $n = p$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}$ est appelée **matrice carrée** d'ordre n . On note plus simplement $\mathcal{M}_n$ cet ensemble.
- ▶ Si $n = p$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ la matrice est dite **diagonale**. De plus, on appelle **matrice identité** I la matrice vérifiant $a_{ii} = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (avec $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$).
- ▶ Si $n = p$ et $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ la matrice est dite **triangulaire inférieure**.
- ▶ Si $n = p$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ la matrice est dite **triangulaire supérieure**.
- ▶ Si $n = p$ on définit **la trace** de A par :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On définit

- ▶ la **matrice somme** $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ par

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\},$$

- ▶ la **matrice produit** $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ (avec $\lambda \in K$) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}.$$

Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On définit

- ▶ la **matrice somme** $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ par

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\},$$

- ▶ la **matrice produit** $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ (avec $\lambda \in K$) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}.$$

Théorème.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ muni des deux lois précédentes (somme de matrices et produit par un scalaire) est un **e.v.** sur K . De plus **$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(K)) = np$** .

Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On définit

- ▶ la **matrice somme** $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ par

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\},$$

- ▶ la **matrice produit** $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ (avec $\lambda \in K$) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}.$$

Théorème.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ muni des deux lois précédentes (somme de matrices et produit par un scalaire) est un **e.v.** sur K . De plus **$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(K)) = np$** .

Question. Existence d'un lien entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$?

Applications linéaires et matrices

Définition 2.2.1.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . On associe à u une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ représentant u dans les bases E et F sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} u(e_1) \\ \downarrow \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{matrix} & \begin{matrix} u(e_p) \\ \downarrow \\ \end{matrix} \\ =A \end{pmatrix}} \quad \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_n \end{matrix}$$

Applications linéaires et matrices

Définition 2.2.1.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . On associe à u une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ représentant u dans les bases E et F sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} u(e_1) \\ \downarrow \\ a_{1,1} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} u(e_p) \\ \downarrow \\ a_{1,p} \end{matrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix} a_{n,1} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} a_{n,p} \end{matrix} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_n \end{matrix}$$

Conclusion. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement définie via son image des éléments de la base de E , i.e., u est entièrement définie par $(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Produit de matrices

Définition.

Soit $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$.
On définit la matrice produit $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}.$$

Produit de matrices

Définition.

Soit $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$.
On définit la matrice produit $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}.$$

Attention ! Le produit AB de deux matrices A et B est possible **si et seulement si** le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B !

Produit de matrices

Définition.

Soit $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$.
On définit la matrice produit $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{i\color{red}{k}} b_{\color{red}{k}j} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}.$$

Attention ! Le produit AB de deux matrices A et B est possible **si et seulement si** le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B !

Attention !! Le produit de matrices est associatif et distributif par rapport à la somme (voir Proposition 2.2.2.) Par contre le produit **n'est pas commutatif !!**

Produit de matrices et composition

Proposition (voir Définition 2.2.6.)

On considère :

- ▶ E un e.v. et $\mathcal{E}$ sa base,
- ▶ F un e.v. et $\mathcal{F}$ sa base,
- ▶ G un e.v. et $\mathcal{G}$ sa base,
- ▶ $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et B sa représentation matricielle dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$,
- ▶ $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et A sa représentation matricielle dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$

Alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$ admet pour matrice $C = AB$.
Schématiquement on a :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow[v]{B} & F & \xrightarrow[A]{u} & G \\ & & & & \\ E & \xrightarrow[C=AB]{u \circ v} & G & & \end{array}$$

Calcul explicite de l'image d'un vecteur

Proposition (voir Section 2.2.5.)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ la matrice de u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Alors, pour $x \in E$ et $y \in F$

$$y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX \quad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} y = u(x) &= \sum_{j=1}^p x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right)}_{\text{coord. } u(x) \text{ dans } F} f_i \end{aligned}$$

Matrice inverse

Définition 2.2.7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. La matrice A est dite inversible si il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n$ telle que $AC = CA = I$. Si C existe on la note A^{-1} .

Matrice inverse

Définition 2.2.7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. La matrice A est dite inversible si il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n$ telle que $AC = CA = I$. Si C existe on la note A^{-1} .

Proposition 2.2.4 et Proposition 2.2.5.

- ▶ Si A est inversible sa matrice inverse est **unique**.
- ▶ Si A et B sont **deux matrices inversibles** de $\mathcal{M}_n$ alors AB est inversible et on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

- ▶ Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ un **isomorphisme** et A la matrice représentant u dans les bases de E et F . Alors A est inversible et A^{-1} est la matrice représentative de u^{-1} dans les bases de F et E .

Matrice transposée

Définition 2.2.8.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. On appelle transposée de A la matrice notée $A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes, i.e.,

$$(A^\top)_{ij} = a_{ji} \quad i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n.$$

Proposition 2.2.6.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $B \in \mathcal{M}_{p,m}$, on a

$$(A^\top)^\top = A, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Définition 2.2.9.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

- ▶ A est dite symétrique si $A^\top = A$ ($a_{ij} = a_{ji}$),
- ▶ A est dite antisymétrique si $A^\top = -A$ ($a_{ij} = -a_{ji}$).

Matrice de passage

Définition 2.2.10.

On considère $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E . On appelle matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ la matrice, notée $P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$, dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix}}_{=P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}} \quad \begin{array}{l} \begin{array}{ccc} e'_1 & \dots & e'_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_n \end{array}$$

Propriétés

Proposition 2.2.8.

On considère $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E . Alors la matrice de passage $P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}}$.

Proposition 2.2.9.

Soit $Q \in \mathcal{M}_n$ et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On définit les vecteurs $e'_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} e_i$. Alors on a l'équivalence suivante :

$(e'_1, \dots, e'_n)$ est une base de $E \Leftrightarrow Q$ est inversible.

Changement de bases et composantes d'un vecteur

Proposition 2.2.10.

On considère $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E . Soit $x \in E$, on note X et X' les matrices colonnes contenant les composantes de x dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Soit $P = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ alors

$$X' = P^{-1}X (= P_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}}X_{\mathcal{E}}) \quad \Leftrightarrow \quad X = PX' (= P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}X'_{\mathcal{E}'}).$$

Changement de bases et application linéaire

Théorème 2.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E . On note A la matrice de u dans $\mathcal{E}$ ($A_{\mathcal{E}}$) et A' la matrice de u dans $\mathcal{E}'$ ($A_{\mathcal{E}'}$). Enfin soit $P = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$, alors

$$A' = P^{-1} A P \quad (A_{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}} A_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'})$$

Remarque. Les matrices associées au même endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ sont **semblables**.

Proposition 2.2.11.

On considère A et $B \in \mathcal{M}_n$. Alors si A et B sont semblables

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(B).$$

Changement de bases et application linéaire

Théorème 2.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E . On note A la matrice de u dans $\mathcal{E}$ ($A_{\mathcal{E}}$) et A' la matrice de u dans $\mathcal{E}'$ ($A_{\mathcal{E}'}$). Enfin soit $P = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$, alors

$$A' = P^{-1} A P \quad (A_{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}} A_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'})$$

Définition 2.2.11.

S'il existe P inversible telle que $A' = P^{-1} A P$ alors A et A' sont dites semblables.

Remarque. Les matrices associées au même endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ sont **semblables**.

Proposition 2.2.11.

On considère A et $B \in \mathcal{M}_n$. Alors si A et B sont semblables

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(B).$$

Table of contents

1. Applications linéaires

2. Matrices

3. Théorème du rang

Rang

Définition 2.2.12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle rang de u la dimension de $\text{Im}(u)$, i.e., $\text{rang}(u) = \dim(\text{Im}(u))$.

Proposition 2.2.12.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, alors $\text{Im}(A) = \text{vect}\langle A_1, \dots, A_p \rangle$.

Définition 2.2.14.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, alors $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.

Rang

Définition 2.2.12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle rang de u la dimension de $\text{Im}(u)$, i.e., $\text{rang}(u) = \dim(\text{Im}(u))$.

Remarques. On a

- ▶ $\text{rang}(u) \leq \dim(F)$ (car $\text{Im}(u) \subset F$),
- ▶ $\text{rang}(u) \leq \dim(E)$ (car l'image d'une base de E génère $\text{Im}(u)$).

Définition 2.2.13.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, on appelle $\text{Im}(A)$ le s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,1}$ défini par

$$Y \in \text{Im}(A) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}, Y = AX.$$

Proposition 2.2.12.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, alors $\text{Im}(A) = \text{vect}\langle A_1, \dots, A_p \rangle$.

Définition 2.2.14.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, alors $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.

Lien entre rang d'une application linéaire et "sa" matrice

Proposition 2.2.13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si on choisit $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F et si on définit A la matrice associée à u . Alors

$$\text{rang}(u) = \text{rang}(A).$$

Calcul pratique.

- ▶ Def 2.2.14 et Prop 2.2.14 $\Rightarrow$ calcul du nombre maximal de colonnes ou lignes linéairement indépendantes.
- ▶ Si $\text{rang}(u)$ connu alors $\text{rang}(A)$ également.

Lien entre rang d'une application linéaire et "sa" matrice

Proposition 2.2.13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si on choisit $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F et si on définit A la matrice associée à u . Alors

$$\text{rang}(u) = \text{rang}(A).$$

Proposition 2.2.14.

- ▶ Si A et A' sont semblables alors elles ont le même rang.
- ▶ A et A^T ont le même rang.

Calcul pratique.

- ▶ Def 2.2.14 et Prop 2.2.14 $\Rightarrow$ calcul du nombre maximal de colonnes ou lignes linéairement indépendantes.
- ▶ Si $\text{rang}(u)$ connu alors $\text{rang}(A)$ également.

Théorème du rang

Théorème 2.2.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(\ker(u)) + \text{rang}(u) = \dim(E)$.

Théorème du rang

Théorème 2.2.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(\ker(u)) + \text{rang}(u) = \dim(E)$.

Proposition 2.2.15.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶ u est injective,
- ▶ u est surjective,
- ▶ u est bijective.

Noyau d'une matrice

Définition 2.2.15.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, on appelle noyau de A le s.e.v. de $\mathcal{M}_{p,1}$, noté $\ker(A)$, défini par

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1} : AX = 0\}.$$

Théorème 2.2.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = p = \text{nb colonnes de } A.$$

Proposition 2.2.16.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ alors

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n.$$