

Méthode de Newton-Raphson pour $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Florian De Vuyst

October 4, 2025

Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\mathbf{f}$ admet une racine $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ dans $\mathbb{R}^2$. On note $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ les deux composantes de $\mathbf{f}(x, y)$. Soit $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Un développement de Taylor à l'ordre 1 de f_1 en $\mathbf{x} = (x, y)$ au voisinage de $\mathbf{x}_0$ donne

$$f_1(x, y) = f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

De même, un développement de Taylor à l'ordre 1 de f_2 au voisinage de $\mathbf{x}_0$ donne

$$f_2(x, y) = f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

En rassemblant les deux composantes, on peut écrire l'expression sous forme vectorielle condensée

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$$

où $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice jacobienne de $\mathbf{f}$ au point $\mathbf{x}_0$:

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Méthode de Newton-Raphson. La méthode de Newton-Raphson est l'extension vectorielle de la méthode de Newton. Sur le même principe, $\mathbf{f}$ est localement linéarisée. Partant de l'itéré $\mathbf{x}_{(k)}$, on cherche $\mathbf{x}_{(k+1)}$ comme le zéro de la linéarisation de $\mathbf{f}$ au voisinage de $\mathbf{x}_{(k)}$, soit

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{(k)}) + J\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(k)})(\mathbf{x}_{(k+1)} - \mathbf{x}_{(k)})$$

En supposant que $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(k)})$ est une matrice inversible, on obtient

$$\mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{x}_{(k)} - [J\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(k)}).$$

Algorithme. En pratique, pour l'itération (k) , on ne calcule pas l'inverse de la matrice jacobienne $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(k)})$, mais on résout un système linéaire :

1. On cherche le vecteur $\mathbf{w}_{(k)} \in \mathbb{R}^2$ solution du système linéaire

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(k)})\mathbf{w}_{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_{(k)}) ;$$

2. On effectue

$$\mathbf{x}_{(k+1)} = \mathbf{x}_{(k)} + \mathbf{w}_{(k)}.$$