

MT23. EXEMPLES DE $\mathbb{R}$ ESPACES VECTORIELS

Véronique Hédou et Antoine Zurek

On dresse dans ce document différents exemples de $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie qui seront fréquemment (voir toujours) considérés dans les exemples et exercices de MT23. Il semble donc important de bien travailler et comprendre ces exemples ainsi que de comprendre la nature des objets/vecteurs de ces espaces. Dans ces notes, on rappelle les lois internes et externes de ces espaces, leurs bases naturelles ou canoniques et leurs dimensions.

L'objectif de cette note est donc de décrire quelques exemples d'espaces vectoriels (encore une fois de dimension finie). La description de ces espaces est relativement simple une fois que la notion **capitale** de base d'un espace vectoriel est bien comprise. C'est par le biais de la base d'un espace vectoriel de dimension finie que l'on peut le décrire entièrement ! En effet, même si l'espace vectoriel (de dimension finie) contient un nombre "infini" d'éléments, une base de cet espace, une fois connue, permet de décomposer tous les vecteurs de l'espace vectoriel comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs !

1. L'EXEMPLE PROTOTYPIQUE $\mathbb{R}^n$

Dans cette section n désigne un entier naturel plus grand ou égal à 2 (le cas $n = 1$ ne présentant pas beaucoup d'intérêt dans ce cours). L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est constitué des n -upplets de la forme :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n),$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit sur L'ensemble $\mathbb{R}^n$ les lois $+$ (l.c.i.) et $\cdot$ (l.c.e.) suivantes

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Ces lois permettent de doter $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Par ailleurs, l'élément neutre de $\mathbb{R}^n$ pour la loi $+$ est le vecteur nul, i.e.,

$$\vec{0}_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0).$$

Exemple 1. Pour $n = 2$, alors

$$\vec{x} + \vec{y} = (1, 2) + (3, -1) = (4, 1), \quad 2 \cdot \vec{x} = 2 \cdot (1, 2) = (2, 4).$$

□

Remarque 2. En pratique et comme dans le cas de la multiplication dans $\mathbb{R}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on note plus simplement $\lambda \cdot \vec{x}$ par $\lambda \vec{x}$. □

Déterminons maintenant la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour ce faire, soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ quelconque s'écrivant sous la forme

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

En utilisant la définition des lois $+$ et $\cdot$ on remarque que

$$x = x_1 \underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0)}_{\vec{e}_1} + x_2 \underbrace{(0, 1, 0, \dots, 0)}_{\vec{e}_2} + x_3 \underbrace{(0, 0, 1, \dots, 0)}_{\vec{e}_3} + \dots + x_n \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 1)}_{\vec{e}_n}.$$

Comme tout vecteur de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$, le calcul précédent montre que la famille des n vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille **génératrice** de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit

$$\mathbb{R}^n = \text{Vect}\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n \rangle,$$

où pour rappel

$$\text{Vect}\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n \rangle = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \exists x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ avec } \vec{y} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 + \dots x_n \vec{e}_n \}.$$

Exemple 3. En reprenant la définition du vecteur x de l'Exemple 1, on a la décomposition suivante :

$$x = (1, 2) = (1, 0) + (0, 2) = 1 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2.$$

□

Pour démontrer que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base, il suffit de démontrer que cette famille est libre. Ainsi, soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}.$$

En utilisant à présent la définition de la loi $\cdot$ et la définition des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \vdots \\ \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ et donc que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est **libre**. Cette famille de $\mathbb{R}^n$ étant génératrice et libre, elle forme une **base**, dite base canonique, de $\mathbb{R}^n$. On en déduit également que

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \text{Card}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} = n.$$

2. L'ESPACE DES POLYNÔMES

Un autre exemple fréquemment rencontré en MT23 est l'espace des polynômes de degré au plus $n \in \mathbb{N}$ à coefficients réels noté $\mathcal{P}_n$ (ou $\mathbb{R}_n[X]$). Commençons par décrire les éléments de $\mathcal{P}_n$: ici, les vecteurs sont des polynômes de degré au plus n et à coefficients réels. En pratique, comme dans le cas des fonctions habituelles, pour travailler avec des polynômes (qui sont des fonctions) on utilise leur représentation analytique (autrement dit la définition de la valeur de $p(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Ainsi, tout polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ s'écrit sous la forme

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ici, il faut comprendre que les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$, représentent les coordonnées du polynôme p (dans une certaine base de $\mathcal{P}_n$ décrite plus bas).

Pour tout $p, q \in \mathcal{P}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit sur l'ensemble $\mathcal{P}_n$ les lois $+$ (l.c.i.) et $\cdot$ (l.c.e.) suivantes :

$$(1) \quad (p + q)(t) = p(t) + q(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et

$$(2) \quad (\lambda \cdot p)(t) = \lambda p(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, partant de deux polynômes p et $q \in \mathcal{P}_n$ on construit un nouveau polynôme $p + q \in \mathcal{P}_n$ via la formule (1) et partant d'un polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ on construit un nouveau polynôme $\lambda \cdot p \in \mathcal{P}_n$ via la formule (2). Il est important de comprendre que pour définir ces lois, on utilise bien l'action ou l'évaluation de ces polynômes en tout point t de $\mathbb{R}$.

Enfin, on remarque que l'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{P}_n$ est le polynôme nul, noté $0_{\mathcal{P}_n}$, défini par la formule suivante :

$$0_{\mathcal{P}_n}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4. Soit $n = 2$ et $p, q \in \mathcal{P}_2$ avec

$$p(t) = t^2 + t, \quad q(t) = 2t^2 - 3t + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le polynôme $p + q \in \mathcal{P}_2$ est donné par la formule suivante :

$$(p + q)(t) = p(t) + q(t) = (t^2 + t) + (2t^2 - 3t + 1) = 3t^2 - 2t + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et le polynôme $2 \cdot p \in \mathcal{P}_n$ par la formule

$$(2 \cdot p)(t) = 2p(t) = 2(t^2 + t) = 2t^2 + 2t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Remarque 5. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, en pratique on note plus simplement λp à la place de $\lambda \cdot p$ (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathcal{P}_n$). □

Pour décrire complètement l'espace vectoriel $(\mathcal{P}_n, +, \cdot)$, il suffit d'en déterminer une base. On va en particulier décrire dans la suite la base canonique de $\mathcal{P}_n$.

Soit $p \in \mathcal{P}_n$ quelconque, alors il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (les coordonnées de p) vérifiant

$$p(t) = a_n \underbrace{t^n}_{p_n(t)} + a_{n-1} \underbrace{t^{n-1}}_{p_{n-1}(t)} + \dots + a_0 \underbrace{1}_{p_0(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cette relation, permet d'écrire que¹

$$p = a_n p_n + a_{n-1} p_{n-1} + \dots + a_0 p_0.$$

Cette dernière relation met en avant que la famille des polynômes $(p_0, \dots, p_n)$ est une famille **génératrice** de $\mathcal{P}_n$. En effet, celle-ci montre que tout polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes de la famille $(p_0, \dots, p_n)$. Autrement dit

$$\mathcal{P}_n = \text{Vect}\langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle.$$

Exemple 6. En reprenant la définition du polynôme p de l'Exemple 4 on obtient la décomposition suivante :

$$p(t) = t^2 + t = 1 p_2(t) + 1 p_1(t) + 0 p_0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou encore

$$p = 1 p_2 + 1 p_1 + 0 p_0.$$

□

Montrons à présent que cette famille est libre. Pour ce faire, on considère $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$(3) \quad \underbrace{\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n}_{\in \mathcal{P}_n} = \underbrace{0_{\mathcal{P}_n}}_{\text{poly. nul}}.$$

¹Il est important de comprendre que dans la première formule on manipule des nombres réels et dans la deuxième formule des fonctions (il ne faut pas confondre une fonction et la valeur de cette fonction).

Pour montrer que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, on va utiliser l'expression analytique des polynômes $p_0, p_1, \dots, p_n$. Autrement dit, on dit que la relation (3) est équivalente à

$$\underbrace{\lambda_0 p_0(t) + \lambda_1 p_1(t) + \dots + \lambda_n p_n(t)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ce qui implique, via la définition des polynômes $p_0, p_1, \dots, p_n$, que

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La relation précédente étant vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que le polynôme $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n \in \mathcal{P}_n$ admet une infinité de racines, ce qui n'est possible que si tous ses coefficients sont nuls², i.e.,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

En conclusion, la famille $(p_0, \dots, p_n)$ est **libre**. Comme cette famille est libre et génératrice, elle forme une **base** de $\mathcal{P}_n$ et

$$\dim(\mathcal{P}_n) = \text{Card}\{p_0, p_1, \dots, p_n\} = n + 1.$$

Il faut faire attention : la dimension de l'espace $\mathcal{P}_n$ est bien $n + 1$!

3. L'ESPACE DES MATRICES CARRÉES

Comme dans le cours, on notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ composées de n lignes et n colonnes (ici $n \geq 2$). Autrement, l'ensemble constitué des éléments suivants :

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les lois $+$ (l.c.i.) et $\cdot$ (l.c.e.) suivantes :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix},$$

et

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ces deux lois permettent de doter $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace vectoriel. Par ailleurs, l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la loi $+$ est la matrice nulle $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ avec

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

²Pour rappel, un polynôme de degré n admet au plus n racines ou est le polynôme nul.

Exemple 7. Soit $n = 2$ et A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A + B$ est donnée par

$$A + B = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

et la matrice $-1 \cdot A$ par

$$-1 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Remarque 8. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{P}_n$, en pratique on note plus simplement λA à la place de $\lambda \cdot A$ (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Cherchons à présent à expliciter la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on remarque que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme (4) peut s'écrire sous la forme

$$A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{1n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{nn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

En introduisant les matrices $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient sur la ligne i colonne j valant 1, on peut réécrire l'expression précédente sous la forme

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{1n}E_{1n} + a_{21}E_{21} + \dots + a_{2n}E_{2n} + \dots + a_{n1}E_{n1} + \dots + a_{nn}E_{nn}.$$

Cette décomposition montre que la famille $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn})$ est une famille **génératrice** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e.,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}\langle E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn} \rangle.$$

Exemple 9. En reprenant la définition de la matrice A de l'Exemple 7 on a

$$A = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1E_{11} + 2E_{12} - 2E_{21} + 10E_{22}.$$

Pour montrer que la famille $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que cette famille est libre. Ainsi, considérons $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{nn} \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lambda_{11}E_{11} + \lambda_{12}E_{12} + \dots + \lambda_{nn}E_{nn} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

De manière plus développée, cette relation s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique directement que

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{nn} = 0,$$

et donc que la famille $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn})$ est **libre**. Cette famille constitue donc une **base**, dite canonique, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs, on a

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \text{Card}\langle E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn} \rangle = n^2.$$

Remarque 10. *Bien entendu vous pouvez reproduire la même construction (comme dans le cours), pour démontrer que l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, est de dimension np .*