

MT09-A2025 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 20 mins. Sans documents ni outils électroniques

Rédigez directement sur la feuille

NOM, PRÉNOM :

Place n° :

Exercice 1 (*barème approximatif : 3 points*)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Donner la définition de $\|\mathbf{x}\|_\infty$. Que vaut $(A\mathbf{x})_i$ (i -ème composante du vecteur $A\mathbf{x}$, $i \in \{1, \dots, n\}$) ? En déduire que

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

2. Donnez les expressions des normes matricielles subordonnées $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$.

3. Soit un réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$. Que vaut $\text{Cond}_{\|\cdot\|_2}(A)$ pour la matrice symétrique

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & -1 + \varepsilon \\ -1 + \varepsilon & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} ?$$

Exercice 2 (*barème approximatif : 2 points*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice de valeurs propres réelles λ_i , $1 \leq i \leq n$. Soit un réel μ qui n'est pas une valeur propre de A .

1. Quelles sont les valeurs propres de la matrice B définie par

$$B = (A - \mu I)^{-1} ?$$

2. Comment calculer numériquement la valeur propre de A la plus proche de μ ? Expliquez succinctement.

MT09-A2025 – Examen médian*Durée : 70 mins.**Notes et photocopies de cours autorisés – Smartphones interdits.*

Questions de cours déjà traitées : 5 points.

RÉDIGEZ CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE.**Exercice 1** (*barème approximatif : 6 points*)Soit A la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de A par les pivots de Gauss (on assemblera la matrice L pendant la triangulation).
2. Calculez $\det(A)$. Que peut-on en conclure sur la définie-positivité de A ?
3. La matrice A admet-elle une factorisation LDL^T , où D est une matrice diagonale ?
4. Déterminez D tel que $U = DL^T$.
5. Trouvez un vecteur $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$.

CHANGEZ DE COPIE SVP !**Exercice 2** (*barème approximatif : 2 points*)Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la grandeur

$$\|A\|_X = \max_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_2$$

où A_j désigne le j ème vecteur colonne de A et $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ est la norme vectorielle euclidienne.

1. Montrez que $\|A\|_X = 0 \Rightarrow A = 0$. De même, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrez que $\|A + B\|_X \leq \|A\|_X + \|B\|_X$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^T$. Que valent $\|A\|_X$, $\|B\|_X$ et $\|AB\|_X$? Que peut-on en conclure ?

CHANGEZ DE COPIE SVP !**Exercice 3** (*barème approximatif : 7 points*)Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On suppose que l'on a déjà résolu K systèmes linéaires ($K \ll n$)

$$A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k, \quad k = 1, \dots, K$$

pour K anciens seconds membres $\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, K$. On pose

$$B = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_K] \in \mathcal{M}_{nK}(\mathbb{R}), \quad X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K] \in \mathcal{M}_{nK}(\mathbb{R}).$$

Sous forme matricielle, on a

$$AX = B. \tag{1}$$

Hypothèse. - On suppose $\text{rg}(B) = K$.**TOURNEZ LA FEUILLE SVP →**

On voudrait tirer avantage de ces K solutions déjà calculées pour estimer rapidement une solution approchée du nouveau système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2)$$

étant donné un nouveau vecteur second membre $\mathbf{b}$.

1. Questions préliminaires :

(a) Quelle est la taille de $B^T B$?

(b) Donner une base de $\text{Im}(B)$ et déterminer $\ker(B)$.

(c) Montrer que $B^T B$ est inversible. *Indication* : considérer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K$ tel que $\mathbf{x}^T B^T B \mathbf{x} = 0$.

2. On note $\tilde{\mathbf{b}}$ la projection orthogonale de $\mathbf{b}$ sur $\text{Im}(B)$. Le vecteur $\tilde{\mathbf{b}}$ est caractérisé par les relations d'orthogonalité et d'appartenance

$$\begin{cases} \langle \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{b}_k \rangle = 0 & \forall k = 1, \dots, K, \\ \tilde{\mathbf{b}} \in \text{Im}(B). \end{cases}$$

Montrer que $\mathbf{b}_k^T \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_k^T \mathbf{b} \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}$ et

$$B^T \tilde{\mathbf{b}} = B^T \mathbf{b}.$$

3. Montrer qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^K$ tel que

$$\tilde{\mathbf{b}} = B\boldsymbol{\alpha}. \quad (3)$$

4. En déduire que $\boldsymbol{\alpha} = (B^T B)^{-1} B^T \mathbf{b}$.

5. On note $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur solution du système linéaire

$$A\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}. \quad (4)$$

En utilisant (3) et (1), montrez que

$$A\tilde{\mathbf{x}} = A\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}.$$

On note $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T$. En déduire que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbf{x}_k.$$

6. À partir de (2) et (4), montrez que

$$A(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}.$$

7. Étant donné $\|\cdot\|$ une norme vectorielle, montrez que

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{Cond}_{\|\cdot\|}(A) \frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

8. Commentez l'inégalité obtenue.

9. Que se passe-t-il si $\mathbf{b} \in \text{Vect}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_K)$? *Indication* : montrez que $\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b} \in \text{Im}(B) \cap (\text{Im}(B))^\perp$. Conclure.