

Questions de cours

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Ex 1 1- $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \rightarrow |(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$

$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty$$

$$\leq \left(\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \|x\|_\infty$$

En particulier,

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |(Ax)_i| \leq \left(\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \|x\|_\infty$$

2- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \|A^T\|_\infty$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A A^T)}$$

3- $\text{tr } A = \frac{1}{2} (2 + 2\varepsilon) = 1 + \varepsilon$, $\det A = \frac{1}{4} \left[(1+\varepsilon)^2 - (\varepsilon-1)^2 \right] = \varepsilon$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \varepsilon, \lambda_2 = 1$$

$$\text{Cond} \| \cdot \|_2(A) = \frac{|u_1|}{|u_2|} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Ex 2 1- $A \vec{y}_i = \lambda_i \vec{y}_i$ $A \vec{y}_i - \mu \vec{y}_i = \lambda_i \vec{y}_i - \mu \vec{y}_i = (\lambda_i - \mu) \vec{y}_i = (A - \mu I) \vec{y}_i$

$$\lambda_i - \mu \neq 0 \Rightarrow (A - \mu I) \text{ inversible et } (A - \mu I)^{-1} \vec{y}_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu} \vec{y}_i$$

$\Rightarrow$ Les v.p de B sont $(\lambda_i - \mu)^{-1}$.

2- Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\frac{1}{|\lambda_{i_0} - \mu|} > \frac{1}{|\lambda_i - \mu|} \forall i \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{i_0} - \mu}$ est la

valeur propre dominante $\rightarrow$ On peut appliquer la méthode de puissances itérées inverses pour calculer $\frac{1}{\lambda_{i_0} - \mu}$ et donc λ_{i_0}, y_{i_0} .

Ex 1 1. $L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 20)

2. $\det(A) = \det(LU) = -2 = \prod_{i=1}^4 \lambda_i \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, 4\} / \lambda_i < 0$

$\Rightarrow A$ n'est pas scp.

3. La matrice A admet une décomposition LU sans permutation. Donc d'après le cours, A a toutes ses sous-matrices principales inversibles. De plus, A est symétrique $\Rightarrow A$ admet une factorisation LDL^T .

4. $\underline{U}_1 = (\underline{DLT})_1 = \underline{D}_1 L^T = d_{11} L_1^T \Rightarrow d_{11} = 1.$

$\underline{U}_2 = (\underline{DLT})_2 = \underline{D}_2 L^T = d_{22} L_2^T \Rightarrow d_{22} = 2.$

De même, on trouve $d_{33} = 1$ et $d_{44} = -1.$ $D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$

5. $\det A \neq 0$ donc A est inversible. $\det L^T = 1 \neq 0 \Rightarrow L^T$ inversible.

$\exists x \neq 0 / L^T x = \tilde{e}_4.$

$x^T A x = x^T L D L^T x = (L^T x)^T D (L^T x) = e_4^T D e_4 = d_{44} = -1.$

Ex 2

$$1. \bullet \|A\|_X = 0 \Rightarrow \exists j_0 / \|A_{j_0}\|_2 = 0 \Rightarrow \tilde{A}_{j_0} = \vec{0}.$$

Par conséquent, $\forall j, \|A_j\|_2 \leq \|A_{j_0}\|_2 = 0 \Rightarrow \tilde{A}_j = \vec{0} \forall j \Rightarrow A = 0.$

$$\bullet \|A+B\|_X = \|(A+B)_{j_0}\|_2 \leq \|A_{j_0}\|_2 + \|B_{j_0}\|_2 \leq \|A\|_X + \|B\|_X.$$

$$2. \|A\|_X = \|A_1\|_2 = 1. \quad B = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|B\|_X = \|B_1\|_2 = \sqrt{2}$$

$$\text{mais } AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|AB\|_X = \|(AB)_1\|_2 = 2$$

On remarque que $\|AB\|_X > \|A\|_X \cdot \|B\|_X$

$\Rightarrow \|\cdot\|_X$ n'est pas une norme matricielle.

Ex 3

$$1. a) B \in M_{n \times K}(\mathbb{R}) \rightarrow \underbrace{B^T B}_{K \times K} \in M_{K \times K}(\mathbb{R}).$$

$$b) \tilde{b}_k = B \tilde{e}_k \in \text{Im } B. \Rightarrow \text{Vect}(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_K) \subset \text{Im } B$$

$$\text{mais } \text{rg}(B) = K \Rightarrow \text{Im } B = \text{Vect}(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_K).$$

$$\text{Théorème du rang : } \dim \text{Ker } B + \underbrace{\dim \text{Im } B}_{=K} = \dim \mathbb{R}^K = K$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker } B = 0 \Rightarrow \text{Ker } B = \{0\}.$$

$$c) x^T B^T B x = \|Bx\|^2 = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } B$$

$$\text{mais } \text{Ker } B = \{0\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B^T B \text{ inversible.}$$

$B^T B$ est en fait sdp.

$$2. - \langle b - \tilde{b}, b_k \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle b, b_k \rangle = \langle \tilde{b}, b_k \rangle$$

$$\Leftrightarrow b_k^T b = b_k^T \tilde{b}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{b}^T b_k = b^T b_k \quad \forall k (*)$$

$$\text{Rappel : } A = \sum_{j=1}^n A_j e_j^T$$

$$\text{De } (*), \text{ on peut dire } \tilde{b}^T b_k e_k^T = b^T b_k e_k^T$$

$$\Rightarrow \tilde{b}^T \sum_{\ell=1}^k b_{\ell} e_{\ell}^T = b^T \sum_{\ell=1}^k b_{\ell} e_{\ell}^T \quad (4^{\circ})$$

$$\Leftrightarrow \tilde{b}^T B = b^T B$$

$$\Leftrightarrow B^T \tilde{b} = B^T b. \quad (\text{en prenant la transposée}).$$

$$3. \tilde{b} \in \text{Im}(B). \text{ Par définition de } \text{Im } B, \exists \alpha \in \mathbb{R}^k / \tilde{b} = B \tilde{\alpha} \quad \begin{matrix} n \times k & k \times 1 \end{matrix}$$

4. À partir de 2. et 3., on obtient

$$B^T B \alpha = B^T b \text{ mais } B^T B \text{ inversible}$$

$$\Rightarrow \alpha = (B^T B)^{-1} B^T b.$$

$$5. A \tilde{x} = \tilde{b} \text{ mais } \tilde{b} = B \alpha \text{ et } B = A X \quad (1)$$

$$\Rightarrow A \tilde{x} = A X \alpha$$

$$\Leftrightarrow A(\tilde{x} - X \alpha) = 0 \text{ mais } A \text{ est inversible}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} - X \alpha = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = X \tilde{\alpha}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \\ = \sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell} \tilde{x}_{\ell}.$$

$$6. \begin{cases} A x = b \\ A \tilde{x} = \tilde{b} \end{cases} \rightarrow A(x - \tilde{x}) = b - \tilde{b}$$

$$7. x - \tilde{x} = A^{-1}(b - \tilde{b}) \Rightarrow \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}(b - \tilde{b})\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|.$$

$$\text{Par ailleurs } b = A x \Rightarrow \|b\| = \|A x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \frac{1}{\|b\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

8- Si l'erreur de projection orthogonale est petite, c'est-à-dire
 si $\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$ petit, et si le conditionnement de A est petit,

alors $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$ sera petit

$\Rightarrow \tilde{x}$ sera une bonne approximation de x .

La détermination de $\tilde{x}$ ne nécessite que la résolution d'un petit système linéaire de taille K .

9- Si $\tilde{b} \in \text{Vect}(b_1, \dots, b_k) = \text{Im } B$, on a aussi $\tilde{b} \in \text{Im } B$.

Comme $\text{Im } B$ est un sous-espace vectoriel,

$$b - \tilde{b} \in \text{Im } B$$

Par ailleurs, $\langle b - \tilde{b}, b_k \rangle = 0 \quad \forall k \Rightarrow b - \tilde{b} \in (\text{Im } B)^\perp$

$$\Rightarrow b - \tilde{b} \in \text{Im } B \cap (\text{Im } B)^\perp = \{0\}.$$

$$\Rightarrow \tilde{b} = b$$

$\Rightarrow \tilde{x} = x$. On trouve la solution exacte du système linéaire.