

Dans la suite on considère les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons les valeurs et vecteurs propres de ces matrices :

Pour A_1 . On a

$$\det(A_1 - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 (4 - \lambda).$$

Donc

$$\underline{\lambda = 2} \text{ v.p. double et } Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0, \vec{v}.p. \text{ associé à } 2.$$

$$\underline{\lambda = 4} \text{ v.p. simple et } Y = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ avec } \gamma \neq 0, \vec{v}.p. \text{ associé à } 4.$$

Pour A_2 . On a

$$\det(A_2 - \lambda I) = (2 - \lambda) (3 - \lambda)^2.$$

Donc

$$\underline{\lambda = 2} \text{ v.p. simple et } Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \neq 0, \vec{v}.p. \text{ associé à } 2.$$

$$\underline{\lambda = 3} \text{ v.p. double et } Y = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \beta \neq 0, \vec{v}.p. \text{ associé à } 3.$$

Pour A_3 . On a

$$\det(A_3 - \lambda I) = (2 - \lambda) \underbrace{[(1 - \lambda)^2 + 1]}_{a^2 - b^2 \text{ avec } b=i}$$

D'où

$$\det(A_3 - \lambda I) = (2 - \lambda) (1 - i - \lambda)(1 + i - \lambda).$$

Donc

$$\underline{\lambda = 2} \text{ v.p. simple et } Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \neq 0, \vec{v}.p. \text{ associé à } 2.$$

$$\underline{\lambda = 1 + i} \text{ v.p. simple et } Y = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \text{ avec } \beta \neq 0, \vec{v}.p. \text{ associé à } 1 + i.$$

$$\underline{\lambda = 1 - i} \text{ v.p. simple et } Y = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \text{ avec } \gamma \neq 0, \vec{v}.p. \text{ associé à } 1 - i.$$

Ce vecteur est le conjugué du $\vec{v}.p.$ associé à $1 + i$.

Matrices	v.p. et multiplicité	sous-espaces propres	$\vec{v}.$ p. base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$?	$\dim(V_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i)$?	diagonalisable ?
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	2 double 4 simple	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_4 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$			
$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	2 simple 3 double	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_3 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$			
$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	2 simple $1 + i$ simple $1 - i$ simple	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{1+i} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{1-i} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$			

Matrices	v.p. et multiplicité	sous-espaces propres	$\vec{v}.$ p. base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$?	$\dim(V_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i)$?	diagonalisable ?
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	2 double 4 simple	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_4 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$		
$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	2 simple 3 double	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_3 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ pas base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$		
$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	2 simple $1 + i$ simple $1 - i$ simple	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{1+i} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{1-i} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ pas base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$		

Matrices	v.p. et multiplicité	sous-espaces propres	$\vec{v}.$ p. base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$?	$\dim(V_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i)$?	diagonalisable ?
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	2 double 4 simple	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_4 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$		Oui dans $\mathbb{R}$
$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	2 simple 3 double	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_3 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ pas base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$		Non, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	2 simple $1 + i$ simple $1 - i$ simple	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{1+i} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{1-i} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ pas base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$		Non dans $\mathbb{R}$ Oui dans $\mathbb{C}$

Matrices	v.p. et multiplicité	sous-espaces propres	$\vec{v}.$ p. base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$?	$\dim(V_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i)$?	diagonalisable ?
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	2 double 4 simple	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_4 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$	$\dim(V_2) = 2 = \text{mult}(2)$ $\dim(V_4) = 1 = \text{mult}(4)$	Oui dans $\mathbb{R}$
$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	2 simple 3 double	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_3 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ pas base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$	$\dim(V_2) = 1 = \text{mult}(2)$ $\dim(V_3) = 1 \neq \text{mult}(3)$	Non, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	2 simple $1 + i$ simple $1 - i$ simple	$V_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{1+i} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{1-i} = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ pas base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ base $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$	$\dim(V_2) = 1 = \text{mult}(2)$ $\dim(V_{1+i}) = 1 = \text{mult}(1 + i)$ $\dim(V_{1-i}) = 1 = \text{mult}(1 - i)$	Non dans $\mathbb{R}$ Oui dans $\mathbb{C}$