MT09-A2024 - Examen Final - Questions de cours

Durée : 20 mins. Sans documents ni outils électroniques Répondre directement sur la feuille

NOM, PRÉNOM:

Place n^{o} :

ATTENTION feuille R/V. Il y a 4 exercices indépendants pour cette partie cours.

Exercice 1 (barème approximatif: 1,5 points)

Soit
$$x_0 = (x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$$
, $||x_0||_2 = 1$ et A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1. Est-ce que la méthode des puissances itérées, avec x_0 comme initialisation, converge? Justifiez.
- 2. Est-ce en désaccord avec le théorème du cours ?

Exercice 2 (barème approximatif: 1,5 points)

Soit m et n deux entiers tels que $m \geq n \geq 1$. Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

1. Le problème

$$\min_{oldsymbol{z} \in \operatorname{Im}(A)} \quad \|oldsymbol{z} - oldsymbol{y}\|_2$$

a-t-il une solution? Unique? Écrire les 2 conditions satisfaites par la solution.

2. Soit \hat{z} un vecteur qui réalise le minimum. Montrer que $A^T\hat{z}=A^Ty$.

Exercice 3 (barème approximatif: 1,5 points)

Écrire en pseudo-code l'algorithme de Horner qui calcule le polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

au point θ en n additions et n multiplications.

Exercice 4 (barème approximatif: 2 points)

1. Trouvez les poids ω_1 et ω_2 pour que la formule de quadrature sur [0,1]

$$J(f) = \omega_1 f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) + \omega_2 f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$$

soit au moins d'ordre 1.

2. Étant donné ω_1 et ω_2 trouvés en première question, quel est l'ordre maximal de la formule de quadrature J(f)?

MT09-A2024 - Examen Final

 $Dur\'ee: \mathbf{1h40}.$

Polycopiés de cours uniquement autorisés. Smartphones et tout outil électronique interdits.

Questions de cours déjà traitées : 6,5 points.

Exercice 1 - Programmation python (barème approximatif: 3,5 points)

a) Écrire une fonction python

```
def PI(x0, A, kmax, tol):
    # ...
    return lambda, v, k, res, cvg
```

qui met en œuvre la méthode des puissances itérées pour le calcul approché d'une paire valeur propre - vecteur propre (λ, v) . Les spécifications sont les suivantes :

- Les paramètres d'entrée sont : x0 : vecteur d'initialisation, A matrice, kmax le nombre maximal d'itérations et tol la tolérance pour le test de convergence.
- Les variables de sortie sont lambda valeur propre, v vecteur propre, k l'itération d'arrêt, res le résidu et cvg un booléen qui précise si le critère de convergence a été atteint (True) ou non (False).
- Dans la fonction, on testera si A a la bonne dimension par rapport à x0 et on retournera un message d'erreur si ce n'est pas le cas.
- Étant donné le vecteur d'itération courant \boldsymbol{v} , le λ courant sera calculé comme

$$\lambda = \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v}.$$

• Le résidu res sera défini par

$$res = ||A\boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{v}||_2.$$

• Les itérations continueront à être effectuées tant que

$$\Big(\ \mathtt{res} > \mathtt{tol}\ \Big) \quad \mathrm{et} \quad \Big(\ \mathtt{k} < \mathtt{kmax}\ \Big).$$

- Représentez les tabulations du code python avec une barre verticale sur votre copie.
- On précisera bien sûr tous les appels de modules python nécessaires à la mise en œuvre.
- b) Écrire ensuite un script python qui crée la matrice A et le vecteur x_0 , puis qui appelle la fonction PI() et affiche les résultats lambda, v, k, res, cvg pour les données suivantes :

$$\mathbf{x}_0 = (1, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^{100}, \quad A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}),$$

avec kmax=1000 et tol égal à 10^{-10} .

*** CHANGEZ DE COPIE ***

Exercice 2 - Moindres carrés, régression (barème approximatif: 3,5 points)

On considère la fonction créneau $\phi(x)$ définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \ge 0, \end{cases}$$

et une fonction de régression f de la forme

$$f(x) = u_1 \phi(x) + u_2 \phi(x-3) + u_3 \phi(x-6), \tag{1}$$

où u_1, u_2, u_3 sont des réels. On a le tableau de valeurs (x_i) et (y_i) , i = 1, ..., 7 suivantes

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	-2	-3	-2	1	1	2	3

On note $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbb{R}^3$. On souhaite résoudre le problème aux moindres carrés

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 [f(x_i) - y_i]^2 \tag{2}$$

- 1. Calculer respectivement $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_7)$ en fonction de u_1, u_2, u_3 .
- 2. Dans l'intervalle [0,7], tracez la fonction $x \mapsto f(x)$ pour $(u_1, u_2, u_3) = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Sur le même graphique, ajoutez les points (x_i, y_i) , i = 1, ..., 7.
- 3. Réécrire le problème aux moindres carrés (2) sous la forme condensée

$$\min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3} \quad \frac{1}{2} \|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice A et le vecteur y.

4. Quel est le système linéaire satisfait par la solution \boldsymbol{u} du problème aux moindres carrés ? Calculez la matrice et le second membre du système. Vérifiez que $\boldsymbol{u} = \frac{5}{2}(-1,1,1)^T$ est solution du système.

Exercice 3 - Interpolation et intégration numérique (barème approximatif : 3 points)

- 1. Déterminer (selon la méthode de votre choix) le polynôme p_1 de degré inférieur ou égal à 2 tel que $p_1(0) = 1$, $p_1(\frac{1}{2}) = p_1(1) = 0$.
- 2. Déterminer le polynôme p_2 de degré inférieur ou égal à 2 tel que $p_2(0)=0, p_2(\frac{1}{2})=1, p_2(1)=0.$
- 3. Déterminer le polynôme p_3 de degré inférieur ou égal à 2 tel que $p_3(0) = p_3(\frac{1}{2}) = 0$, $p_3(1) = 1$.
- 4. Soit f une fonction continue sur [0,1]. À partir de p_1 , p_2 , p_3 donner l'expression du polynôme d'interpolation p tel que

$$p(0) = f(0), \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right), \quad p(1) = f(1).$$

5. En déduire une formule de quadrature J(f) sur [0,1] de la forme

$$J(f) = \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\frac{1}{2}) + \omega_3 f(1)$$

où l'on précisera les valeurs de ω_1 , ω_2 et ω_3 .

6. Quelle est l'ordre de la formule de quadrature J(f)?

*** CHANGEZ DE COPIE ***

Exercice 4 - Schéma numérique (barème approximatif : 6 points)

Soit $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, h > 0 et $t_n = nh$ pour tout n entier. On considère le schéma numérique

$$\begin{cases}
z_{n+1} = z_n + h \phi(t_n, z_n, h), & n \in \mathbb{N}, \\
z_0 = y_0
\end{cases}$$
(3)

avec

$$\phi(t,z,h) = \frac{f(t,z)}{\frac{\partial f}{\partial y}(t,z)} \frac{e^{\frac{\partial f}{\partial y}(t,z)h} - 1}{h}.$$

- 1. Le schéma numérique (3) est-il explicite ou implicite ?
- 2. À t > 0 et $y \in \mathbb{R}$ donnés, que vaut

$$\lim_{h\to 0^+} \phi(t,y,h) ?$$

Indication: écrire de développement limité à l'ordre 2 de $g(h) = \frac{e^{\alpha h} - 1}{h}$ au voisinage de 0, pour un certain α .

3. Soit y(t) la solution du problème différentiel

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) & \text{pour } t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
(4)

Donner l'expression de l'erreur de consistance $\tau_{n+1}(h)$ pour le schéma (3). Montrez que le schéma est consistant (NB : on ne demande pas ici l'ordre du schéma).

4. Dans cette question, on considère le cas linéaire autonome

$$f(t,y) = -\lambda \, y$$

avec $\lambda > 0$.

(a) Montrez que dans ce cas

$$\phi(t, z, h) = \frac{e^{-\lambda h} - 1}{h} z.$$

(b) Donnez l'expression de la solution exacte y(t) du problème différentiel dans ce cas. Montrez que

$$y(t_{n+1}) = e^{-\lambda h} y(t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c) Montrez que

$$z_{n+1} - y(t_{n+1}) = e^{-\lambda h} (z_n - y(t_n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En déduire que

$$z_n = y(t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Qu'en concluez-vous?

5. De nouveau, dans cette question et les suivantes, on prend f quelconque (pas nécessairement linéaire). Montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$\exp\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n,y(t_n))h\right) = 1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n,y(t_n)) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n,y(t_n))\right)^2 \exp\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,z)\theta h\right).$$

6. Montrez qu'il existe $\xi \in [t_n, t_{n+1}]$ tel que

$$\frac{\tau_{n+1}(h)}{h} = \frac{h}{2} \left[y''(\xi) - y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) e^{\frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \theta h} \right].$$

- 7. En déduire que, sous certaines hypothèses de régularité sur f que vous préciserez, le schéma est d'ordre 1.
- 8. En considérant le cas particulier f(t,y) = t, montrez que le schéma n'est pas d'ordre 2.
- 9. (hors barème, bonus 2 points) Montrer que le schéma est d'ordre 2 pour les systèmes autonomes (c'està-dire f indépendante de t).