MT09-A2024 – Examen Final – Questions de cours
Durée : **20 mins**. *Sans documents ni outils électroniques*
Répondre directement sur la feuille

NOM, PRÉNOM :	Place n° :

ATTENTION feuille R/V. Il y a 4 exercices indépendants pour cette partie cours.

Exercice 1 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Soit $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$, $\|\boldsymbol{x}_0\|_2 = 1$ et A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Est-ce que la méthode des puissances itérées, avec $\boldsymbol{x}_0$ comme initialisation, converge ? Justifiez.
2. Est-ce en désaccord avec le théorème du cours ?

Exercice 2 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Soit m et n deux entiers tels que $m \geq n \geq 1$. Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

1. Le problème

$$\min_{\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}(A)} \quad \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\|_2$$

   a-t-il une solution ? Unique ? Écrire les 2 conditions satisfaites par la solution.

2. Soit $\hat{\boldsymbol{z}}$ un vecteur qui réalise le minimum. Montrer que $A^T\hat{\boldsymbol{z}} = A^T\boldsymbol{y}$.

TOURNEZ LA PAGE SVP ⇒

Exercice 3 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Écrire en pseudo-code l'algorithme de Horner qui calcule le polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n$$

au point θ en n additions et n multiplications.

Exercice 4 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Trouvez les poids ω_1 et ω_2 pour que la formule de quadrature sur $[0, 1]$

$$J(f) = \omega_1\, f\Big(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\Big) + \omega_2\, f\Big(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}\Big)$$

   soit au moins d'ordre 1.

2. Étant donné ω_1 et ω_2 trouvés en première question, quel est l'ordre maximal de la formule de quadrature $J(f)$?

MT09-A2024 – Examen Final
Durée : **1h40**.
Polycopiés de cours uniquement autorisés.
Smartphones et tout outil électronique interdits.

Questions de cours déjà traitées : *6,5 points.*

Exercice 1 - Programmation python *(barème approximatif : 3,5 points)*

a) Écrire une fonction `python`

```
def PI(x0, A, kmax, tol):
    # ...
    return lambda, v, k, res, cvg
```

qui met en œuvre la méthode des puissances itérées pour le calcul approché d'une paire valeur propre - vecteur propre $(\lambda, \boldsymbol{v})$. Les spécifications sont les suivantes :

- Les paramètres d'entrée sont : `x0` : vecteur d'initialisation, `A` matrice, `kmax` le nombre maximal d'itérations et `tol` la tolérance pour le test de convergence.
- Les variables de sortie sont `lambda` valeur propre, `v` vecteur propre, `k` l'itération d'arrêt, `res` le résidu et `cvg` un booléen qui précise si le critère de convergence a été atteint (`True`) ou non (`False`).
- Dans la fonction, on testera si `A` a la bonne dimension par rapport à `x0` et on retournera un message d'erreur si ce n'est pas le cas.
- Étant donné le vecteur d'itération courant $\boldsymbol{v}$, le λ courant sera calculé comme
$$\lambda = \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v}.$$
- Le résidu `res` sera défini par
$$\text{res} = \|A\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v}\|_2.$$
- Les itérations continueront à être effectuées tant que
$$\Big(\texttt{res} > \texttt{tol} \Big) \quad \text{et} \quad \Big(\texttt{k} < \texttt{kmax} \Big).$$
- Représentez les tabulations du code `python` avec une barre verticale sur votre copie.
- On précisera bien sûr tous les appels de modules `python` nécessaires à la mise en œuvre.

b) Écrire ensuite un script `python` qui crée la matrice A et le vecteur $\boldsymbol{x}_0$, puis qui appelle la fonction `PI()` et affiche les résultats `lambda, v, k, res, cvg` pour les données suivantes :

$$\boldsymbol{x}_0 = (1, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^{100}, \quad A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_{100}(\mathbb{R}),$$

avec `kmax=1000` et `tol` égal à 10^{-10}.

***** CHANGEZ DE COPIE *****

Exercice 2 - Moindres carrés, régression *(barème approximatif : 3,5 points)*

On considère la fonction créneau $\phi(x)$ définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et une fonction de régression f de la forme

$$f(x) = u_1\,\phi(x) + u_2\,\phi(x-3) + u_3\,\phi(x-6), \tag{1}$$

où u_1, u_2, u_3 sont des réels. On a le tableau de valeurs (x_i) et (y_i), $i = 1, ..., 7$ suivantes

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	-2	-3	-2	1	1	2	3

.

On note $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbb{R}^3$. On souhaite résoudre le problème aux moindres carrés

$$\min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}[f(x_i) - y_i]^2 \tag{2}$$

1. Calculer respectivement $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_7)$ en fonction de u_1, u_2, u_3.
2. Dans l'intervalle $[0, 7]$, tracez la fonction $x \mapsto f(x)$ pour $(u_1, u_2, u_3) = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Sur le même graphique, ajoutez les points les points (x_i, y_i), $i = 1, ..., 7$.
3. Réécrire le problème aux moindres carrés (2) sous la forme condensée

$$\min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3} \quad \frac{1}{2}\|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

   où l'on précisera la matrice A et le vecteur $\boldsymbol{y}$.

4. Quel est le système linéaire satisfait par la solution $\boldsymbol{u}$ du problème aux moindres carrés ? Calculez la matrice et le second membre du système. Vérifiez que $\boldsymbol{u} = \frac{5}{2}(-1, 1, 1)^T$ est solution du système.

Exercice 3 - Interpolation et intégration numérique *(barème approximatif : 3 points)*

1. Déterminer (selon la méthode de votre choix) le polynôme p_1 de degré inférieur ou égal à 2 tel que $p_1(0) = 1$, $p_1(\frac{1}{2}) = p_1(1) = 0$.
2. Déterminer le polynôme p_2 de degré inférieur ou égal à 2 tel que $p_2(0) = 0$, $p_2(\frac{1}{2}) = 1$, $p_2(1) = 0$.
3. Déterminer le polynôme p_3 de degré inférieur ou égal à 2 tel que $p_3(0) = p_3(\frac{1}{2}) = 0$, $p_3(1) = 1$.
4. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. À partir de p_1, p_2, p_3 donner l'expression du polynôme d'interpolation p tel que

$$p(0) = f(0), \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right), \quad p(1) = f(1).$$

5. En déduire une formule de quadrature $J(f)$ sur $[0, 1]$ de la forme

$$J(f) = \omega_1\,f(0) + \omega_2\,f\left(\frac{1}{2}\right) + \omega_3\,f(1)$$

   où l'on précisera les valeurs de ω_1, ω_2 et ω_3.

6. Quelle est l'ordre de la formule de quadrature $J(f)$?

***** CHANGEZ DE COPIE *****

Exercice 4 - Schéma numérique *(barème approximatif : 6 points)*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $t_n = nh$ pour tout n entier. On considère le schéma numérique

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h\,\phi(t_n, z_n, h), \quad n \in \mathbb{N}, \\ z_0 = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

avec

$$\phi(t,z,h) = \frac{f(t,z)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,z)} \; \frac{e^{\frac{\partial f}{\partial y}(t,z)\,h} - 1}{h}.$$

1. Le schéma numérique (3) est-il explicite ou implicite ?
2. À $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ donnés, que vaut
$$\lim_{h \to 0^+} \phi(t,y,h) \;?$$
Indication: écrire de développement limité à l'ordre 2 de $g(h) = \dfrac{e^{\alpha h} - 1}{h}$ au voisinage de 0, pour un certain α.
3. Soit $y(t)$ la solution du problème différentiel
$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad \text{pour } t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$
Donner l'expression de l'erreur de consistance $\tau_{n+1}(h)$ pour le schéma (3). Montrez que le schéma est consistant (NB : on ne demande pas ici l'ordre du schéma).
4. Dans cette question, on considère le cas linéaire autonome
$$f(t,y) = -\lambda\, y$$
avec $\lambda > 0$.
   (a) Montrez que dans ce cas
   $$\phi(t,z,h) = \frac{e^{-\lambda h} - 1}{h}\, z.$$
   (b) Donnez l'expression de la solution exacte $y(t)$ du problème différentiel dans ce cas. Montrez que
   $$y(t_{n+1}) = e^{-\lambda h}\, y(t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (c) Montrez que
   $$z_{n+1} - y(t_{n+1}) = e^{-\lambda h}\,(z_n - y(t_n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   En déduire que
   $$z_n = y(t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   Qu'en concluez-vous ?
5. De nouveau, dans cette question et les suivantes, on prend f quelconque (pas nécessairement linéaire). Montrer qu'il existe $\theta \in [0,1]$ tel que
$$\exp\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\,h\Big) = 1 + h\,\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\right)^2 \exp\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\,\theta h\Big).$$
6. Montrez qu'il existe $\xi \in [t_n, t_{n+1}]$ tel que
$$\frac{\tau_{n+1}(h)}{h} = \frac{h}{2}\left[y''(\xi) - y'(t_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\, e^{\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\,\theta h}\right].$$
7. En déduire que, sous certaines hypothèses de régularité sur f que vous préciserez, le schéma est d'ordre 1.
8. En considérant le cas particulier $f(t,y) = t$, montrez que le schéma n'est pas d'ordre 2.
9. **(hors barème, bonus 2 points)** Montrer que le schéma est d'ordre 2 pour les systèmes autonomes (c'est-à-dire f indépendante de t).