Chapitre - Systèmes d'équations différentielles (en préparation du chapitre 7)

MT09 – UTC

3 décembre 2025

1 Introduction

Soit $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}^d$ une application continue. On considère le système d'équations différentielles du premier ordre

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t), t) \tag{1}$$

À ce système différentiel on associe une condition initiale

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

où $\boldsymbol{y}_0$ est donné.

Vocabulaire – Les équations (1) et la condition initiale (2) définissent ce qu'on appelle un problème différentiel. La solution $\boldsymbol{y}(t)$ de donnée initiale $\boldsymbol{y}_0$, parfois notée $\boldsymbol{y}(t; \boldsymbol{y}_0)$ s'appelle une courbe intégrale du système différentiel. Le vecteur $\boldsymbol{y}(t)$ s'appelle l'état du système, ou vecteur d'état. L'espace $\mathbb{R}^d$ s'appelle l'espace des états. L'application $\boldsymbol{f}$ est appelée parfois le champ de vecteurs du système différentiel. Si $\boldsymbol{f}$ ne dépend pas explicitement de t, on dit que le système est autonome.

En général, on s'intéresse d'abord aux questions d'existence et d'unicité de la solution d'un problème différentiel. Le théorème de Cauchy-Lipschitz établit que si l'application $\boldsymbol{f}$ est localement lipschitzienne par rapport à la première variable, alors on a existence et unicité d'une solution sur un intervalle $[0, T[$ (T peut valoir possiblement $+\infty$).

2 Exemples

2.1 Croissance d'une population de cellules

Une équation différentielle peut parfois être scalaire ($d = 1$). C'est le cas par exemple d'un modèle simplifié de croissance cellulaire, où l'on regarde l'évolution de la densité de cellules $\rho(t)$ (nombre de cellules par unité de surface). L'équation différentielle (autonome) s'écrit

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \sigma \frac{\rho(t)}{\rho_M}(\rho_M - \rho(t)) \tag{3}$$

où $\rho_M > 0$ est la densité maximale de cellules et σ est un taux de croissance cellulaire. Ici,

$$f(\rho) = \frac{\sigma \rho}{\rho_M}(\rho_M - \rho).$$

Si l'on ajoute la condition initiale $\rho(0) = \rho_0$ avec $\rho_0 > 0$, $\rho_0 \leq \rho_M$, alors on montre que la solution $\rho(t)$ a pour expression

$$\rho(t) = \rho_M \, \frac{e^{\sigma t}}{\frac{\rho_M}{\rho_0} - 1 + e^{\sigma t}}, \qquad t > 0 \tag{4}$$

(voir exercice de TD). La représentation graphique de $\rho(t)$ donne une courbe de forme sigmoïde.

2.2 Système masse-ressort amorti avec terme de forçage

Un système masse-ressort posé sur une surface est sujet à une accélération horizontale périodique (vibration du support par exemple). Si $u(t)$ est le déplacement horizontal de la masse ponctuelle de masse m, et si $v(t)$ représente sa vitesse instantanée, on a les équations de la cinématique et de bilan de quantité de mouvement qui donnent

$$\frac{du(t)}{dt} = v(t),$$

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -k\,u(t) - a\,v(t) + \alpha\sin(\omega t),$$

où $k > 0$ est la coefficient de raideur du ressort, $a > 0$ le coefficient d'amortissement, α un coefficient et $\omega > 0$ la pulsation du forçage. On peut réécrire le système sous la forme (1) avec

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},t) = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{k}{m}\,u - \frac{a}{m}\,v + \frac{\alpha}{m}\sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 0$, le système est autonome ($\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$).

Remarque 1. *Comme $\dot{u}(t) = v(t)$, le système d'équations différentielles du premier ordre peut s'écrire en une seule équation différentielle, mais du second ordre :*

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} + a\frac{du(t)}{dt} + ku(t) = \alpha\sin(\omega t).$$

3 Équations différentielles linéaires

3.1 Équation scalaire

L'équation différentielle du premier ordre la plus simple est l'équation linéaire

$$\dot{y}(t) = a(t)\,y(t).$$

Si $y(0) = y_0$ et si $A(t)$ est la primitive le $a(t)$ telle que $A(0) = 0$, alors il est facile de vérifier que la solution $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = y_0\,\exp(A(t)), \qquad t \geq 0. \tag{5}$$

Si $a(t) = a$ (équation différentielle à coefficient constant), alors $y(t) = y_0\,e^{at}\ \ \forall t \geq 0$.

3.2 Système d'équations

Considérons maintenant le système d'équations différentielles, autonome, à coefficients constants

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt} = A\,\boldsymbol{y}(t) \tag{6}$$

où $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Ici $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y}$. Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, i.e. $A = P\Lambda P^{-1}$ avec $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, alors par le changement de variable $\boldsymbol{w}(t) = P^{-1}\boldsymbol{y}(t)$, on peut réécrire le système différentiel sous forme diagonale

$$\frac{d\boldsymbol{w}(t)}{dt} = \Lambda\,\boldsymbol{w}(t). \tag{7}$$

Les équations différentielles sont alors découplées. On a

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = \lambda_i\,w_i(t), \quad 1 \leq i \leq d.$$

La donnée initiale en $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ peut s'écrire en $\boldsymbol{w}$, soit $\boldsymbol{w}(0) = P^{-1}\,\boldsymbol{y}(0) = P^{-1}\,\boldsymbol{y}_0$. On a alors

$$w_i(t) = (\boldsymbol{w}_0)_i\,e^{\lambda_i t}.$$

Au final on trouve la solution $\boldsymbol{y}(t)$ écrite sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{y}(t) = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_i t})\,P^{-1}\boldsymbol{y}_0. \tag{8}$$

En introduisant l'exponentielle de matrice définie dans ce cas par

$$\exp(A) = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_i})\,P^{-1}, \tag{9}$$

la solution est alors

$$\boldsymbol{y}(t) = \exp(At)\,\boldsymbol{y}_0 \tag{10}$$

(produit matrice-vecteur). Quand A n'est pas diagonalisable, la solution (10) est toujours valable, mais l'exponentielle de matrice est définie désormais de façon générale

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{11}$$

On peut montrer que la série converge quel que soit la matrice A, définissant l'exponentielle de matrice.

Remarque 2. *Les librairies et langages scientifiques ont en général une fonction* `expm(A)` *qui définit l'exponentielle de matrice. C'est le cas par exemple avec* `python` *via les librairies* `numpy` *ou* `scipy`*, mais aussi* `matlab`*,* `scilab` *et* `octave`*.*

4 États d'équilibre, stabilité

4.1 État d'équilibre

On considère ici des systèmes autonomes. Un état $\boldsymbol{y}^\star \in \mathbb{R}^d$ est dit état d'équilibre pour le système (1) si et seulement si

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^\star) = \boldsymbol{0}. \tag{12}$$

On comprend la notion d'état d'équilibre : on constate que la fonction constante $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^\star$ (partant exactement de la donnée initiale $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}^\star$) pour tout t est solution du problème différentiel (1),(2).

Les équilibres peuvent être stables ou instables dans un sens que l'on va donner dans la suite.

4.2 Équilibres stables, instables, asymptotiquement stable

Définition 1. *Soit $\boldsymbol{y}^\star$ un état d'équilibre pour le système* (1)*. On dit que $\boldsymbol{y}^\star$ est*

- *stable au sens de Lyapunov si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0/\ \forall \boldsymbol{y}_0/\ \|\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{y}^\star\| < \delta, \quad \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^\star\| < \epsilon \quad \forall t > 0\ ; \tag{13}$$

- *instable s'il n'est pas stable ;*
- *asymptotiquement stable s'il est stable au sens de Lyapunov et si*

$$\lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^\star.$$

Remarque 3. *La condition* (13) *dit qu'on peut trouver une distance $\delta > 0$ telle que, partant d'une donnée initiale $\boldsymbol{y}_0$ distante de $\boldsymbol{y}^\star$ de moins de δ, alors $\boldsymbol{y}(t)$ reste toujours proche de $\boldsymbol{y}^\star$ (avec une distance d'au plus ε).*

La propriété plus forte de stabilité asymptotique exprime que $\boldsymbol{y}(t)$ de rapproche de plus en plus près de l'équilibre $\boldsymbol{y}^\star$ au cours du temps.

5 Équilibre et stabilité : cas des systèmes linéaires

On considère ici le système différentiel (6) avec A diagonalisable (pour simplifier) dans $\mathbb{C}$. Ici, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = A\,\boldsymbol{y}$, donc $\boldsymbol{y}^\star$ est un état d'équilibre si $\boldsymbol{y}^\star \in \ker(A)$. Supposons que $\ker(A) = \{\boldsymbol{0}\}$. Le seul état d'équilibre dans ce cas est $\boldsymbol{y}^\star = \boldsymbol{0}$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.
1. *Si* $Re(\lambda_k) \leq 0$ *pour tout* k*, alors l'équilibre* $\boldsymbol{y}^\star = \boldsymbol{0}$ *est stable au sens de Lyapunov ;*
2. *Si* $Re(\lambda_k) < 0$ *pour tout* k*, alors l'équilibre est asymptotiquement stable.*
3. *S'il existe un indice* $k_0 \in \{1, ..., d\}$ *tel que* $Re(\lambda_{k_0}) > 0$*, alors l'équilibre est instable.*
4. *Si* $Re(\lambda_k) = 0$ *pour tout* k *(toutes les valeurs propres sont imaginaires pures), on dit que l'équilibre est un centre.*

Démonstration. La solution est de la forme $\boldsymbol{y}(t) = \exp(At)\boldsymbol{y}_0$. Les valeurs propres de $\exp(At)$ sont

$$\exp(\lambda_k t) = e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t + i\,\mathrm{Im}(\lambda_k)t} = e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}\, e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda_k)t}$$

On constate que si $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} |\exp(\lambda_k t))| \to +\infty$ et l'équilibre est instable. Si $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$, alors $\exp(\lambda_k t)$ est imaginaire pur :

$$\exp(\lambda_k t) = e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda_k)t}$$

et $|\exp(\lambda_k t)| = 1$. Si $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ pour tout k, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} |\exp(\lambda_k t))| \to 0$ pour tout k, donc $\lim\limits_{t\to\infty} \exp(At) = 0$ et l'équilibre est asymptotiquement stable. $\square$

6 Stabilité : systèmes non linéaires

6.1 Analyse par linéarisation

On considère ici un système différentiel non linéaire autonome, c'est-à-dire

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)). \tag{14}$$

L'analyse de stabilité d'un état d'équilibre pour un système non linéaire passe par l'analyse du système linéarisé. Soit $\boldsymbol{y}^\star$ un état d'équilibre, on a donc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^\star) = \boldsymbol{0}$. Supposons continûment différentiable. Un développement de Taylor de $\boldsymbol{f}(by)$ au voisinage de $\boldsymbol{y}^\star$ donne

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^\star) + J_f(\boldsymbol{y}^\star)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\star) + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\star\|\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\star)$$

où $J_f(\boldsymbol{y}^\star) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^\star)$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}$ au point $\boldsymbol{y}^\star$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z})$ est telle que $\lim\limits_{\|\boldsymbol{z}\|\to\boldsymbol{0}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$. Comme $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^\star) = \boldsymbol{0}$, on a

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \approx J_f(\boldsymbol{y}^\star)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\star)$$

pour $\boldsymbol{y}$ assez proche de $\boldsymbol{y}_\star$. Le système dit linéarisé de (14) est

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt} = J_f(\boldsymbol{y}^\star)(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^\star). \tag{15}$$

Pour simplifier, on pose $A = J_f(\boldsymbol{y}^\star)$ et on effectue le changement de variable $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^\star$. On tombe alors sur le système différentiel linéaire

$$\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt} = A\boldsymbol{z}(t).$$

On a les cas de figure suivants :

1. Si toutes les valeurs propres de A sont telles que $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$, alors l'équilibre est stable ;
2. S'il existe une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'équilibre est instable ;
3. Si toutes les valeurs propres sont de partie réelle nulle, alors le développement de Taylor à l'ordre 1 (linéarisation) n'est pas suffisant pour conclure. Il faut passer à un développement d'ordre supérieur ou étudier les solutions du système non linéaire quand cela est possible.

6.2 Cas d'indétermination : exemple

À titre d'exemple considérons le système différentiel

$$\frac{dx(t)}{dt} = [x(t)]^3,$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -[y(t)]^3.$$

On a ici

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

Il existe un état d'équilibre $\boldsymbol{y}^\star = \mathbf{0}$. On a

$$J_f(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & -3y^2 \end{pmatrix},$$

donc

$$A = J_f(\boldsymbol{y}^\star) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les deux valeurs propres de A sont nulles. On ne peut donc pas conclure par analyse par linéarisation. Néanmoins, l'équation différentielle $\dot{x}(t) = x^3(t)$ (découplée de $y(t)$) peut être intégrée à la main : on a

$$\frac{dx}{x^3} = dt.$$

Si $x(0) = x_0 > 0$, on a

$$\frac{1}{x^2(t)} - \frac{1}{{x_0}^2} = -2t,$$

soit, pour t assez petit

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2{x_0}^2 t}}.$$

Partant de $x_0 > 0$ aussi près de zéro que l'on veut, on a

$$\lim_{t \to \left(\frac{1}{2{x_0}^2}\right)^-} x(t) = +\infty.$$

L'état d'équilibre $\mathbf{0}$ est donc instable.