

Ex 1 - 1- $\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \rightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$

$\rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$

Méthode des trapèzes : $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx \underbrace{(t_{n+1} - t_n)}_{=h} \frac{f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$

$\rightarrow$ Schéma :

$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \left[f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1}) \right]$

2 - Ia, $f(t, y) = -\lambda y$. $\frac{y'}{y} = -\lambda \rightarrow y(t) = C e^{-\lambda t}$
 $y(0) = y_0 \Rightarrow C = y_0 \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$. $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

3 - $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (-\lambda z_n - \lambda z_{n+1}) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) z_{n+1} = \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) z_n$,

soit $\begin{cases} z_{n+1} = \frac{1 - \lambda h/2}{1 + \lambda h/2} z_n \\ z_0 = y_0 \end{cases} \Rightarrow z_n = \left(\frac{1 - \lambda h/2}{1 + \lambda h/2} \right)^n y_0$.

Si $h \geq \frac{2}{\lambda} \Leftrightarrow 1 - \lambda h/2 \leq 0$, la suite z_n est oscillante, ce qui n'est pas normal par rapport à la solution $y(t)$.

4 - $h = \frac{T}{N}$, $z_N = \left(\frac{1 - \lambda T/(2N)}{1 + \lambda T/(2N)} \right)^N \cdot y_0$

$\frac{1 - \lambda T/(2N)}{1 + \lambda T/(2N)} = 1 - \frac{\lambda T/N}{1 + \lambda T/(2N)}$. $\ln(1+u) = u + o(u)$

$\Rightarrow z_N = e^{N \ln \left(1 - \frac{\lambda T/N}{1 + \lambda T/(2N)} \right)} y_0 = e^{N \left(-\frac{\lambda T/N}{1 + \lambda T/(2N)} + o(h) \right)} y_0$
 $= e^{-\frac{\lambda T}{1 + \lambda T/(2N)}} y_0 \cdot e^{o(h)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-\lambda T} y_0 = y(T)$.

5- $\left| \frac{1-h/2}{1+h/2} \right| < 1 \quad \forall h > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$

On obtient la bonne limite attendue.

Ex 2 - Schéma d'Euler implicite : $\vec{z}_{n+1} = \vec{z}_n + h \vec{f}(t_{n+1}, \vec{z}_{n+1})$.

Pour calculer pratiquement $\vec{z}_{n+1}$, il faut résoudre $\vec{\varphi}_n(\vec{z}) = \vec{0}$,

où $\vec{\varphi}_n(\vec{z}) = \vec{z} - \vec{z}_n - h \vec{f}(t_{n+1}, \vec{z})$.

On peut par exemple appliquer la méthode de Newton.

2- $\varphi'_n(z) = 1 - h \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, z)$. Newton : itération (h) :

$$\rightarrow z(l+1) = z(l) - \frac{\varphi_n(z(l))}{\varphi'_n(z(l))} = z(l) - \frac{z(l) - z_n - h f(t_{n+1}, z(l))}{1 - h \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, z(l))}$$

Puis on affecte $z_{n+1} = z(l+1)$.

3- Cas vectoriel ($p > 1$) : $\vec{z}(l+1) = \vec{z}(l) - \underline{\underline{D\varphi_n(z(l))}} \vec{\varphi}_n(\vec{z}(l))$,

soit

$$\vec{z}(l+1) = \vec{z}(l) - \left[\mathbf{I} - h \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(t_{n+1}, \vec{z}(l)) \right]^{-1} \left(\vec{z}(l) - \vec{z}_n - h \vec{f}(t_{n+1}, \vec{z}(l)) \right)$$

$\uparrow$
 matrice

4- Comme le pas de temps h est petit, $\vec{z}_{n+1}$ ne devrait pas être loin de $\vec{z}_n \Rightarrow$ on peut prendre $\vec{z}(0) = \vec{z}_n$.

5- D'après la Q3, en prenant $\vec{z}(0) = \vec{z}_n$, on obtient :

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{z}_n + h \left[\mathbf{I} - h \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(t_{n+1}, \vec{z}_n) \right]^{-1} \vec{f}(t_{n+1}, \vec{z}_n).$$

Interpretation: $\tilde{z}_{n+1} = \tilde{z}_n + h \underbrace{\tilde{f}(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})}_{\approx \tilde{f}(t_{n+1}, \tilde{z}_n) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t_{n+1}, \tilde{z}_n) (\tilde{z}_{n+1} - \tilde{z}_n)}$

En linéarisant,

$$\left[I - h \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t_{n+1}, \tilde{z}_n) \right] (\tilde{z}_{n+1} - \tilde{z}_n) = h \tilde{f}(t_{n+1}, \tilde{z}_n).$$

Le schéma peut donc être interprété comme le schéma d'Euler implicite linéarisé.

Ex 3 - $\tilde{z}_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h f(t_n, y(t_n))$
 1- $y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \quad \xi \in]t_n, t_{n+1}[.$

$$\Rightarrow \tilde{z}_{n+1}(h) = h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) - h f(t_n, y(t_n))$$

Mais $y(t)$ est solution de $\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \Rightarrow y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$

$$\Rightarrow \tilde{z}_{n+1}(h) = \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{|\tilde{z}_{n+1}(h)|}{h} = \frac{1}{2} h |y''(\xi)|. \Rightarrow \text{Ordre 1 et pas mieux.}$$

2- $\tilde{z}_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n))\right)$

~~$y(t_{n+1}) = y(t_n + \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} y'(t_n + \frac{h}{2}) + \frac{h^2}{8} y''(t_n + \frac{h}{2}) + \frac{h^3}{48} y^{(3)}(\xi_1)$~~ On note $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2}.$

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h}{2} y'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{8} y''(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^3}{48} y^{(3)}(\xi_1)$$

$$y(t_n) = y(t_{n+\frac{1}{2}}) - \frac{h}{2} y'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{8} y''(t_{n+\frac{1}{2}}) - \frac{h^3}{48} y^{(3)}(\xi_2)$$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = h y'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^3}{48} (y^{(3)}(\xi_1) + y^{(3)}(\xi_2)).$$

Par ailleurs,

$$y(t_{n+\frac{1}{2}}) = y(t_n) + \frac{h}{2} y'(t_n) + \frac{h^2}{8} y''(\xi_3)$$

$$= y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{8} y''(\xi_3)$$

$$\Rightarrow \tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h f(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)))$$

$$= h y'(t_{n+\frac{1}{2}}) - h f(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})) - \frac{h^2}{8} y''(\xi_3)$$

$$+ \frac{h^3}{48} (y^{(3)}(\xi_1) + y^{(3)}(\xi_2))$$

$$= h y'(t_{n+\frac{1}{2}}) - h \underbrace{f(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}}))}_{= y'(t_{n+\frac{1}{2}})} + \frac{h^3}{8} \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})) \cdot y''(\xi_3)$$

$$+ \frac{h^3}{48} (y^{(3)}(\xi_1) + y^{(3)}(\xi_2))$$

$$\Rightarrow \frac{|\tau_{n+1}(h)|}{h} = h^2 \cdot \left\{ \frac{1}{8} \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})) \cdot y''(\xi_3) + \frac{1}{48} y^{(3)}(\xi_1) + \frac{1}{48} y^{(3)}(\xi_2) \right\}$$

$\Rightarrow$ Order 2.

Ex 4 - On a $\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h \left\{ \frac{3}{2} f(t_n, y(t_n)) - \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right\}$

$$\frac{\tau_{n+1}(h)}{h} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \left\{ \frac{3}{2} f(t_n, y(t_n)) - \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right\}$$

$\downarrow h \rightarrow 0$ $\downarrow h \rightarrow 0$ $\downarrow h \rightarrow 0$

$y'(t_n)$ $\frac{3}{2} y'(t_n)$ $-\frac{1}{2} y'(t_n)$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Consistent.

2-

$$\begin{aligned}
 z_{n+1}(h) &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - h \left[\frac{3}{2} f(t_n, y(t_n)) - \frac{1}{2} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) \right] \\
 &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - h f(t_n, y(t_n)) - \frac{h}{2} [f(t_n, y(t_n)) - f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))] \\
 &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - h y'(t_n) - \frac{h}{2} (y'(t_n) - y'(t_{n-1})) \\
 &= \left\{ y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y^{(3)}(\xi_1) \right\} - y(t_n) - h y'(t_n) \\
 &\quad - \frac{h}{2} (y'(t_n) - y'(t_{n-1}))
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$y'(t_{n-1}) = y'(t_n) - h y''(t_n) + \frac{h^2}{2} y^{(3)}(\xi_2)$$

$$\Rightarrow z_{n+1}(h) = \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y^{(3)}(\xi_1) - \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{4} y^{(3)}(\xi_2)$$

$$\Rightarrow \frac{|z_{n+1}(h)|}{h} = h^2 \cdot \left| \frac{1}{6} y^{(3)}(\xi_1) + \frac{1}{4} y^{(3)}(\xi_2) \right|.$$

 $\Rightarrow$ ordre 2.3- On considère $F(h, y) = -\lambda y$, $\lambda > 0$. Dans ce cas,

$$z_{n+1} = z_n - \lambda h \left(\frac{3}{2} z_n - \frac{1}{2} z_{n-1} \right)$$

$$\begin{cases} z_{n+1} = \left(1 - \frac{3}{2}\lambda h\right) z_n + \frac{1}{2}\lambda h z_{n-1} \\ z_0, z_1 \text{ donnés.} \end{cases}$$

Equation caractéristique: $r^2 - \left(1 - \frac{3}{2}\lambda h\right)r - \frac{\lambda h}{2} = 0$
 $\Rightarrow z_n = A r_1^n + B r_2^n. \Rightarrow$ Etudier les conditions sur h pour que $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.