MT09-A2025 – Examen Final – Questions de cours
Durée : **20 mins**. *Sans documents ni outils électroniques*
Répondre directement sur la feuille

NOM, PRÉNOM :	Place n^o :

ATTENTION feuille R/V. Il y a 3 exercices indépendants pour cette partie cours.

Question 1 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Écrire l'erreur de consistance $\tau_{n+1}(h)$ pour le schéma d'Euler explicite
$$z_{n+1} = z_n + h\, f(t_n, z_n) \tag{1}$$
(notations habituelles du cours).
2. Donner la définition de la consistance d'un schéma explicite à un pas. Montrer que le schéma (1) est d'ordre 1.
3. Sous quelle condition suffisante le schéma (1) est-il stable ?

Réponses :

TOURNEZ LA PAGE SVP ⇒

Question 2 *(barème approximatif : 1 point)*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit x_0, x_1, ..., x_n des points d'interpolation deux à deux distincts et p_n le polynôme d'interpolation de f aux points x_i, $i = 0, ..., n$, de degré inférieur ou égal à n. Supposant la fonction f $(n+1)$ fois continûment dérivable, on rappelle la formule d'erreur d'interpolation : pour $x \in \mathbb{R}$, il existe $\xi_x = \xi_x(x_0, x_1, ..., x_n, x)$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\, \pi_n(x) \quad \text{où } \pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

1. Quel est le polynôme d'interpolation p_n d'un polynôme q de degré inférieur ou égal à n ? (justifier)
2. Soit $q(x) = x^{n+1}$. Exprimer q en fonction de son polynôme d'interpolation p_n et de π_n.

Réponses :

Question 3 *(barème approximatif : 2 points)* Soit le système différentiel autonome

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = \quad x(t) - 2y(t). \end{cases}$$

1. Écrire le système sous la forme $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A\,\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(t) = (x(t), y(t))^T$ où l'on précisera la matrice A.
2. Quels sont les points d'équilibre du système ? Sont-ils stables ? Justifier.
3. Soit $\boldsymbol{z}_n = (x_n, y_n)^T$ l'approximation numérique de $\boldsymbol{y}(t_n) = (x(t_n), y(t_n))^T$ à l'instant discret $t_n = nh$ (notations du cours). Écrire le schéma d'Euler implicite pour ce système différentiel.
4. Écrire sous forme matricielle la formule qui relie $\boldsymbol{z}_{n+1}$ à $\boldsymbol{z}_n$.

Réponses :

MT09-A2025 – Examen Final
Durée : **1h40**.
Polycopiés de cours + fiche résumé 'python' uniquement autorisés.
Smartphones et tout outil électronique interdits.

Questions de cours déjà traitées : *5 points.* Les 4 exercices suivants sont indépendants.
NB : RÉDIGEZ CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE (ONE COPY PER EXERCISE)

Exercice 1 - Moindres carrés et programmation python *(barème approximatif : 4 points)*

Pour une famille donnée de fonctions $f_i(x)$, $i = 1, ..., m$ continues sur $[-1, 1]$, on connaît la valeur de $I(f_i) = \int_{-1}^{1} f_i(x)\,dx$ pour tout i. Étant donné n points d'intégration x_1, ..., x_n dans $[-1, 1]$, avec $n \le m$, on souhaite déterminer une formule de quadrature

$$J(f) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j\, f(x_j) \tag{1}$$

qui minimise la quantité

$$E_\mu(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \big(J(f_i) - I(f_i)\big)^2 + \frac{1}{2}\,\mu \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2$$

où le vecteur $\boldsymbol{w} = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur inconnu, et $\mu > 0$ est un paramètre de régularisation.

1. Montrer que $E_\mu(\boldsymbol{w})$ peut s'écrire sous la forme

   $$E_\mu(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\, \|A\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \frac{1}{2}\,\mu\, \|\boldsymbol{w}\|_2^2$$

   où l'on précisera la matrice A et le vecteur $\boldsymbol{y}$, ainsi que leur taille respective.

2. Écrire les équations normales associées au problème aux moindres carrés régularisé

   $$\min_{\boldsymbol{w}}\ E_\mu(\boldsymbol{w}).$$

3. Montrer qu'il existe une unique solution aux équations normales.

4. Dans un code `python` déjà existant, on possède une fonction `fi(x,i)` qui calcule $f_i(x)$ pour un tableau `x` donné, une fonction `I(fi,i)` qui calcule $I(f_i)$ de manière très précise, et le tableau `xj` des points d'interpolation x_j (de taille n), l'entier m et le coefficient μ (constante `mu` en `python`) sont aussi déjà définis.

   Écrire une fonction python

   ```
   def calculePoids(m, fi, xj, mu):
           # ...
   ```

   qui assemble la matrice A et le second membre $\boldsymbol{y}$, puis résout les équations normales du problème aux moindres carrés régularisé et retourne le vecteur `w` des poids d'intégration. Écrire ensuite l'instruction qui permet d'appeler la fonction `calculePoids()` pour calculer `w`.

5. Écrire enfin une fonction `python`

   ```
   def Jf(f, xj, w):
           # ...
   ```

   qui calcule la formule de quadrature $J(f)$ (formule (1)) et retourne sa valeur.

Exercice 2 - Formules de quadrature *(barème approximatif : 3 points)*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. On souhaite approcher l'intégrale

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

par une formule de quadrature $J(f)$ de la forme

$$J(f) = \omega_0\, f(\xi) + \omega_1\, f(1) \tag{2}$$

où $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in [0,1[$.

1. Écrire un système de trois équations algébriques sur ω_0, ω_1 et ξ pour que la formule de quadrature soit d'ordre supérieur ou égal à 2.
2. Résoudre alors le système algébrique et donner les valeurs de ω_0, ω_1 et ξ.
3. Que vaut $I(x^3) - J(x^3)$? Conclure.
4. Sur l'intervalle $[-1,1]$, montrer sans calculs (mais en justifiant votre réponse) que l'ordre de la formule de quadrature
$$K(f) = \frac{1}{4}\, f(-1) + \frac{3}{4}\, f(-1/3) + \frac{3}{4}\, f(1/3) + \frac{1}{4}\, f(1)$$
est supérieur ou égal à 3.

Exercice 3 - Schémas numériques pour les EDOs *(barème approximatif : 4 points)*

Soit $\lambda > 0$ et $y_0 > 0$. On considère le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\lambda\, y^2(t), \qquad t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Résoudre le problème différentiel et donner l'expression analytique de la solution $y(t)$.
2. Soit $h > 0$ un pas de temps et $t_n = nh$, $n \in \mathbb{N}$ des temps discrets. Montrer que l'on a aussi
$$y(t_{n+1}) = \frac{y(t_n)}{1 + \lambda\, y(t_n)\, h} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$
3. Écrire le schéma d'Euler explicite
$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + ... \\ z_0 = ... \end{cases}$$
qui discrétise le problème (3).
4. Montrer que sous la condition sur le pas de temps $h \in]0, h^\star[$ où $h^\star = \dfrac{1}{\lambda y_0}$, la suite (z_n) est convergente et converge vers 0^+ quand $n \to +\infty$.
5. On considère maintenant le schéma dit *semi-implicite*
$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n - \lambda\, h\, z_n\, z_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ z_0 = y_0. \end{cases} \tag{5}$$
Exprimez z_{n+1} en fonction de z_n par une formule explicite.
6. Montrer que le schéma (5) est consistant avec l'équation différentielle.

7. Toujours pour le schéma numérique (5), montrer par récurrence que quel que soit $h > 0$,

$$z_n = y(t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 4 - Interpolation polynomiale *(barème approximatif : 4 points)*

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $h > 0$ un paramètre. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 = x_0 - h$ et $x_2 = x_0 + h$.

1. Écrire la forme de Newton du polynôme d'interpolation $p_h(x)$ qui interpole f aux points x_0, x_1 et x_2.
2. Calculer la table des différences divisées et donnez l'expression explicite de $p_h(x)$.
3. Que vaut $p'_h(x_0)$?
4. Que vaut
$$\lim_{h \to 0} p'_h(x_0) \text{ ?}$$
5. On suppose f de classe $\mathscr{C}^3$. Montrer qu'il existe $\xi \in]x_1, x_2[$ tel que
$$f'(x_0) - p'_h(x_0) = \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi).$$
6. Que montre cet exercice ? (répondre succinctement en 2-3 lignes max).