

MT09-A2025 – Examen Final – Questions de cours
 Durée : 20 mins. Sans documents ni outils électroniques
 Répondre directement sur la feuille

NOM, PRÉNOM :

Place n° :

ATTENTION feuille R/V. Il y a 3 exercices indépendants pour cette partie cours.

Question 1 (barème approximatif : 2 points)

1. Écrire l'erreur de consistance $\tau_{n+1}(h)$ pour le schéma d'Euler explicite

$$z_{n+1} = z_n + h f(t_n, z_n) \quad (1)$$

(notations habituelles du cours).

2. Donner la définition de la consistance d'un schéma explicite à un pas. Montrer que le schéma (1) est d'ordre 1.
3. Sous quelle condition suffisante le schéma (1) est-il stable ?

Réponses :

$$1 - \tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h f(t_n, y(t_n))$$

Un schéma est consistant si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\tau_{n+1}(h)|}{h} = 0$, $n \in \{0, \dots, N\}$.

$$\text{d.l. : } y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n), \quad \xi_n \in]t_n, t_{n+1}[$$

$$\rightarrow \tau_{n+1}(h) = h \underbrace{(y'(t_n) - f(t_n, y(t_n)))}_{=0} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \Rightarrow \frac{|\tau_{n+1}(h)|}{h} = \frac{h}{2} |y''(\xi_n)|$$

$\Rightarrow$ Ordre 1.

3 - Ici, $\Phi(t, z, h) = f(t, z)$. D'après le cours, une condition suffisante pour que le schéma (1) soit stable est que f soit Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable y : $\forall t \in [0, T], \forall y, z, \exists L > 0$ /

$$|f(t, z) - f(t, y)| \leq L |z - y|$$

Question 2 (barème approximatif : 1,5 points)

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ des points d'interpolation deux à deux distincts et p_n le polynôme d'interpolation de f aux points $x_i, i = 0, \dots, n$, de degré inférieur ou égal à n . Supposant f $(n+1)$ continûment dérivable, on rappelle la formule d'erreur d'interpolation : pour $x \in \mathbb{R}$, il existe $\xi_x = \xi_x(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \pi_n(x) \quad \text{où } \pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

1. Quel est le polynôme d'interpolation p_n d'un polynôme q de degré inférieur ou égal à n ? (justifiez)
2. Soit $q(x) = x^{n+1}$. Exprimer q en fonction de son polynôme d'interpolation p_n et de π_n .

Réponses :

1. Pour $f = q \in \mathbb{P}_n[X]$, $f^{(n+1)} = 0$, donc $f(x) - p_n(x) = 0 \Rightarrow p_n = q$.

2. Pour $f = q = x^{n+1}$, $f^{(n+1)}(x) = (n+1)! \forall x \Rightarrow f(x) - p_n(x) = \pi_n(x)$

$$\Leftrightarrow f(x) = p_n(x) + \pi_n(x)$$

Question 3 (barème approximatif : 1,5 points) Soit le système différentiel autonome

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - 2y(t). \end{cases}$$

1. Quels sont les points d'équilibre du système ? Sont-ils stables ? Justifiez.
2. Écrire le schéma d'Euler implicite pour ce système.
3. Écrire la formule qui relie $z_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ à $z_n = (x_n, y_n)$.

Réponses :

1. Le système s'écrit $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
 $\det A = 3 \neq 0$. État d'équilibre : $X^* / AX^* = 0 \Rightarrow X^* = 0$ (A inversible).

$$\text{tr } A = -4 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -4 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1.$$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ L'équilibre X^* est stable d'après le cours.

$$2 - X_{n+1} = X_n + h A X_{n+1}$$

3 - $(I - hA)X_{n+1} = X_n$. La matrice $(I - hA)$ a pour valeurs propres :

$$(1 - h\lambda_1) \text{ et } (1 - h\lambda_2) \Rightarrow (I - hA) \text{ s'obp} \Rightarrow (I - hA) \text{ inversible.}$$

$$\Rightarrow X_{n+1} = (I - hA)^{-1} X_n \Rightarrow X_n = (I - hA)^n X_0.$$

Ex 1- 1- $E(w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n w_j f_i(x_j) - I(f_i) \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \sum_{j=1}^n w_j^2$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\underline{A}_i^T \tilde{w} - y_i)^2 + \frac{1}{2} \mu \|\tilde{w}\|_2^2$$

avec $\underline{A}_i = (f_i(x_1), f_i(x_2), \dots, f_i(x_n))$ et $\tilde{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, $y_i = I(f_i)$

$$A = \begin{bmatrix} -\underline{A}_1^T \\ \vdots \\ -\underline{A}_m^T \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{R}), \quad \tilde{w} \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} I(f_1) \\ \vdots \\ I(f_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On a aussi: $E(w) = \frac{1}{2} \|A\tilde{w} - \tilde{y}\|_2^2 + \frac{1}{2} \mu \|\tilde{w}\|_2^2$

2- D'après le cours, les équations normales s'écrivent

$$(A^T A + \mu I_n) \tilde{w} = A^T \tilde{y}$$

3- $A^T A$ est semi-définie positive: $x^T A^T A x = \|Ax\|_2^2 \geq 0$

Comme $\mu > 0$, $(A^T A + \mu I_n)$ est sdp $\Rightarrow$ inversible $\Rightarrow \exists!$ solution.

4- def calculerPoids(m, fi, xj, mu):

$n = x_j.size$

$A = np.zeros((m, n)); y = np.zeros(m);$

for i in range(m):

$y[i] = I(f_i, i)$

$A[i, :] = f_i(x_j, i)$

$\leftarrow w = np.linalg.solve(A^T A + \mu * np.eye(n), A^T y)$

return w

$w = \text{calculerPoids}(m, f_i, x_j, mu)$

5- def JF(f, xj, w):

J = 0.0 ; n = xj.size

for j in range(n):

J += w[j] * f(xj[j])

return J

Ex 2 - On a trois conditions :

$$1- \begin{cases} I(1) = J(1) \\ I(3) = J(3) \\ I(3^2) = J(3^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 + w_1 = 1 & (1) \\ w_0 3 + w_1 = 1/2 & (2) \\ w_0 3^2 + w_1 = 1/3 & (3) \end{cases}$$

$$2- (2)-(1): w_0(3-1) = -\frac{1}{2}$$

$$(3)-(2): w_0 3(3-1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2} 3 = -\frac{1}{6} \Rightarrow 3 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow w_0 = 3/4 \Rightarrow w_1 = 1 - w_0 = 1/4$$

$$\Rightarrow J(f) = \frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} f(1).$$

$$3- I(3^3) = \frac{1}{4}, J(3^3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{4} = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} \Rightarrow I(3^3) - J(3^3) = -\frac{1}{36}$$

La formule est d'ordre 2.

$$4- \text{Pour } f \text{ impaire, on a } K(f) = 0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = I(f).$$

$$\text{Pour } f \text{ paire, on a } K(f) = 2 J(f)$$

$\Rightarrow$ La formule est au moins d'ordre 3.

$$\text{Ex 3 - 1- } \frac{y'(t)}{y^2(t)} = -1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{y(t)} \right]_0^t = [-1.5]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0} = -1.5t \Leftrightarrow y(t) = \frac{y_0}{1 + 1.5 y_0 t}, \forall t \geq 0$$

$$2- \text{La solution de } \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -1.5 y^2(t), t > t_n, \text{ est} \\ y(t_n) = y(t_n) \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{y(t_n)}{1 + 1.5 y(t_n)(t - t_n)}$$

$$\Rightarrow y(t_{n+1}) = \frac{y(t_n)}{1 + 1.5 y(t_n) \Delta t}$$

$$3 - \begin{cases} z_{n+1} = z_n - \Delta h z_n^2 \\ z_0 = y_0 \end{cases}$$

4 - $z_{n+1} = (1 - \Delta h z_n) z_n$. On montre facilement par récurrence que, pour $h < \frac{1}{\lambda y_0}$, (z_n) est décroissante et $z_n > 0$

(donc minorée) $\Rightarrow$ convergente vers une limite z^* .

Par continuité, on a $z^* = (1 - \Delta h z^*) z^* \Rightarrow 1 - \Delta h z^* = 1 \Rightarrow z^* = 0$.

$$5 - z_{n+1} \geq z_n - \Delta h z_n z_{n+1} = (1 - \Delta h z_n) z_n$$

$$z_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta h y(t_n) \cdot y(t_{n+1})$$

$$\left| \frac{z_{n+1}(h)}{h} \right| = \left| \underbrace{\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ \frac{dy}{dt}(t_n)}} - \Delta \underbrace{y(t_n) y(t_{n+1})}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ y(t_n)}} \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{consistant.}$$

6 - On a aussi :

$$z_{n+1} + \Delta h z_n z_{n+1} = z_n \iff (1 + \Delta h z_n) z_{n+1} = z_n$$

$$\iff z_{n+1} = \frac{z_n}{1 + \Delta h z_n}$$

$$z_1 = \frac{z_0}{1 + \Delta h z_0} = \frac{y_0}{1 + \Delta h y_0}, \text{ mais } y(t_1) = \frac{y_0}{1 + \Delta h y_0} \rightarrow z_1 = y(t_1).$$

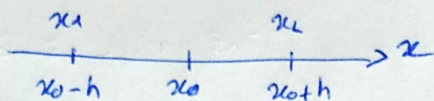
(question 2.)

Supposons par récurrence que $z_n = y(t_n)$ au rang n .

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{1 + \Delta h z_n} = \frac{y(t_n)}{1 + \Delta h y(t_n)} = y(t_{n+1}) \rightarrow \text{vrai au rang } (n+1).$$

Le schéma numérique est exact pour cette équation différentielle particulière.

Ex 4 -



40)

$$1- p_h(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$\begin{array}{l} f[x_0] \searrow \\ f[x_1] \swarrow \\ f[x_2] \swarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \\ \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \swarrow \\ \swarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h^2} - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h^2} \end{array}$$

$$\Rightarrow p_h(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}(x-x_0) + \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h^2} - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h^2} \right] (x-x_0)(x-x_0+h)$$

$$2- p'_h(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + h \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h^2} - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h^2} \right]$$

$$\Rightarrow p'_h(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$3- \lim_{h \rightarrow 0} p'_h(x_0) = f'(x_0).$$

$$5- f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_2)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h f'(x_0) + \frac{h^3}{6} (f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2))$$

Théorème des valeurs intermédiaires : $f^{(3)}$ étant continue, $\exists \xi$ /

$$f^{(3)}(\xi) = \frac{f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)}{2} \Rightarrow f'(x_0) - p'_h(x_0) = \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi).$$

6- Cet exercice donne une formule de différences finies d'ordre 2.