MT23 : algèbre linéaire

Chapitre 1 : espaces vectoriels

Vincent Martin

LMAC - UTC

0. Présentation du cours

1. Espaces vectoriels

2. Sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires

3. Familles libres, familles liées, familles génératrices

4. Bases, dimension

Sommaire

Contenu de MT23

Chapitres :

1. Espaces vectoriels
2. Applications linéaires et matrices
3. Déterminants
4. Valeurs propres et vecteurs propres
5. Espaces euclidiens
6. Équations différentielles linéaires

De belles maths.
Briques de base pour tout l'édifice pour un ingénieur, dans tous les domaines.

Les maths...

Les maths :

- du travail : 1h cours ou TD $\rightarrow$ 1 à 2 h de travail personnel,
- tout est nouveau (ou presque, cf. MT03)
- besoin de logique (cf. MT02)
- travail régulier : connaître le cours avant le TD
- rigueur scientifique : démontrer, prouver, justifier
- comprendre un théorème = comprendre sa démonstration
- abstraction : la travailler (exemples, exercices...)

Les maths...

Les maths :

- du travail : 1h cours ou TD $\rightarrow$ 1 à 2 h de travail personnel,
- tout est nouveau (ou presque, cf. MT03)
- besoin de logique (cf. MT02)
- travail régulier : connaître le cours avant le TD
- rigueur scientifique : démontrer, prouver, justifier
- comprendre un théorème = comprendre sa démonstration
- abstraction : la travailler (exemples, exercices...)
- valider : dur d'obtenir un résultat, passer 2 min à vérifier sa cohérence

Les maths…

Les maths :

- du travail : 1h cours ou TD $\rightarrow$ 1 à 2 h de travail personnel,
- tout est nouveau (ou presque, cf. MT03)
- besoin de logique (cf. MT02)
- travail régulier : connaître le cours avant le TD
- rigueur scientifique : démontrer, prouver, justifier
- comprendre un théorème = comprendre sa démonstration
- abstraction : la travailler (exemples, exercices…)
- valider : dur d'obtenir un résultat, passer 2 min à vérifier sa cohérence
- rappel de logique : "Faux" implique n'importe quoi!

Informations sur MT23

- chargés de TD : Faten Jelassi, Mokhtar El Alaya, VM
- contrôle des connaissances
  - 1 test : 40 à 45 minutes, date à fixer
  - médian : vendredi 17 avril à la place du cours
  - final : semaine du 22 juin
- site moudeul :
  `https://moodle.utc.fr/course/view.php?id=335`
  - planning, calcul de la note finale, date des examens, etc.
  - polycopiés, annales,
  - forum
- polycopié : version papier à acheter à la BU

Planning MT23

MT23 P2026				L	Ma	Me	J	V	V	Observations
	lundi		vendredi	TD1	TD2	TD3	TD	TD4	Cours	
du	23 février	au	27 février						Cours 1 : Chap1	Semaine de rentrée : ni TD, ni TP
du	02 mars	au	06 mars	X	TD1	TD1		TD1	Cours 2 : Chap1	
du	09 mars	au	13 mars	TD1	TD2	TD2		TD2	Cours 3 : Chap2	
du	16 mars	au	20 mars	TD2	TD3	TD3		TD3	Cours 4 : Chap2	
du	23 mars	au	27 mars	TD3	TD4	TD4		TD4	Cours 5 : Chap2	
du	30 mars	au	03 avril	TD4	TD5	TD5		TD5	Cours 6 : Chap3	
du	06 avril	au	10 avril		L – TD5	TD6		TD6	Cours 7 : Chap3	Lundi 6 avril férié
du	13 avril	au	17 avril	TD6	TD6	X		X	Médian	Médians : Pas de TD du 15/04 au 28/04 inclus. Médian à la place du cours.
du	20 avril	au	24 avril							Vacances de Printemps du 20 avril au 26 avril inclus
du	27 avril	au	01 mai	X	X	TD7				vendredi 1er mai : férié
du	04 mai	au	08 mai	TD7	TD7	V – TD7 Cours 8				vendredi 8 mai : férié
du	11 mai	au	15 mai	TD8	TD8	TD8		TD8	Cours 9 : Chap4	Jeudi 14 mai : férié
du	18 mai	au	22 mai	TD9	TD9	TD9		TD9	Cours 10 : Chap4	
du	25 mai	au	29 mai		TD10	TD10		TD10	Cours 11 : Chap5	Lundi 25 mai : férié
du	01 juin	au	05 juin	TD10	TD11	TD11		TD11	Cours 12 : Chap5	
du	08 juin	au	12 juin	TD11	TD12	TD12		TD12	Cours 13 : Chap6	
du	15 juin	au	19 juin	TD12	TD13	TD13		TD13	Cours 14 : Chap6	
du	22 juin	au	26 juin	TD13	examens finaux					Examens finaux du 21/06 au 28/06 inclus

Cours : vendredi 14h15 FA100
TD1 : lundi 10h15 FA412 : FJ
TD2 : mardi 8h00 FA412 : MA
TD3 : mercredi 10h15 FA412 : MA
TD4 : vendredi 10h15 FA504 : VM

***Médian :** mardi 17 avril, 14h15 – 16h15 (à confirmer).*

vincent.martin@utc.fr
faten.jelassi@utc.fr
elmokhtar.alaya@utc.fr

Sommaire

Groupe, définition

Définition 1.1.2.

On appelle groupe tout couple $(G, \star)$, où G est un ensemble muni d'une loi de composition interne ($\star : G \times G \to G$), notée $\star$, telle que :

- $\star$ est associative,
- $\star$ admet un élément neutre,
- tout élément de G admet un symétrique pour $\star$.

Si de plus $\star$ est commutative, on parle de groupe commutatif, ou groupe abélien.

Groupe, définition

Définition 1.1.2.

On appelle groupe tout couple $(G, \star)$, où G est un ensemble muni d'une loi de composition interne ($\star : G \times G \to G$), notée $\star$, telle que :

- $\star$ est associative,
- $\star$ admet un élément neutre,
- tout élément de G admet un symétrique pour $\star$.

Si de plus $\star$ est commutative, on parle de groupe commutatif, ou groupe abélien.

Exemples : groupe ou pas ?

- $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$
- $(\mathbb{R}, \times)$, $(]0, +\infty[, \times)$, $(\mathbb{R}^\star, \times)$, $(\mathbb{C}^\star, \times)$
- $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$, $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ bijective}\}, \circ)$

Groupe, définition

Définition 1.1.2.

On appelle groupe tout couple $(G, \star)$, où G est un ensemble muni d'une loi de composition interne ($\star : G \times G \to G$), notée $\star$, telle que :

- $\star$ est associative,
- $\star$ admet un élément neutre,
- tout élément de G admet un symétrique pour $\star$.

Si de plus $\star$ est commutative, on parle de groupe commutatif, ou groupe abélien.

Exemples : groupe ou pas ?

- $(\mathbb{N}, +)$: NON, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$: groupes abéliens
- $(\mathbb{R}, \times)$: NON, $(]0, +\infty[, \times)$, $(\mathbb{R}^\star, \times)$, $(\mathbb{C}^\star, \times)$: groupes abéliens
- $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$: NON, $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ bijective}\}, \circ)$: groupe non abélien

Groupe, rappels

Soit $(G, \star)$ un groupe. Alors on a :

- G est non vide, car il contient au moins e l'élément neutre.
- l'élément neutre est unique
- pour tout $g \in G$, son symétrique (ou opposé ($\star$ noté "$+$") ou inverse ("$\times$") ou réciproque ("$\circ$")) est unique

Groupe, rappels

Soit $(G, \star)$ un groupe. Alors on a :

- G est non vide, car il contient au moins e l'élément neutre.
- l'élément neutre est unique
- pour tout $g \in G$, son symétrique (ou opposé ($\star$ noté "$+$") ou inverse ("$\times$") ou réciproque ("$\circ$")) est unique

Exemple 2 : pour $n \in \mathbb{N}^\star$,
$\mathcal{S}_n \overset{\text{def.}}{=} \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}, \ \sigma \text{ bijective}\}$

- $(\mathcal{S}_n, \circ)$ est le groupe symétrique (ou groupe des permutations) d'ordre n
- groupe non commutatif si $n \geq 3$:
  (cas $n = 3$) si $\sigma : (1,2,3) \mapsto (1,3,2)$ et $\sigma' : (1,2,3) \mapsto (2,1,3)$,
  alors $\sigma \circ \sigma' : (1,2,3) \overset{\sigma'}{\mapsto} (2,1,3) \overset{\sigma}{\mapsto} (3,1,2)$ (car $1 \overset{\sigma'}{\mapsto} 2 \overset{\sigma}{\mapsto} 3 \dots$)
  et $\sigma' \circ \sigma : (1,2,3) \overset{\sigma}{\mapsto} (1,3,2) \overset{\sigma'}{\mapsto} (2,3,1)$: donc $\sigma \circ \sigma' \neq \sigma' \circ \sigma$.
- voir chap. 3.

Espace vectoriel, définition

Soit E un ensemble non vide et K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans ce cours).

Définition 1.1.3.

On appelle espace vectoriel E sur K, tout ensemble muni d'une loi de composition interne notée "$\hat{+}$" qui lui donne une structure de groupe abélien et d'une loi de composition externe, "." : $K \times E \to E$, vérifiant : $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$,

- $(\lambda\mu).\vec{x} = \lambda.(\mu.\vec{x})$
- $(\lambda + \mu).\vec{x} = \lambda.\vec{x} \hat{+} \mu.\vec{x}$
- $\lambda.(\vec{x} \hat{+} \vec{y}) = \lambda.\vec{x} \hat{+} \lambda.\vec{y}$
- $1.\vec{x} = \vec{x}$ (1 est l'élément unité de K).

Espace vectoriel, exemples

E : espace vectoriel (noté eV par la suite) sur K.

Éléments de E : vecteurs. Éléments de K : scalaires (lettres grecques souvent).

Exemples d'espaces vectoriels :

- pour $n \geq 0$: K^n est un eV ($K^0 = \{0\}$, $K^1 = K$).
  - $\hat{+}_{K^n}$ défini pour tout $i \in [1..n]$ par : $(\vec{x} \mathbin{\hat{+}_{K^n}} \vec{y})_i = \vec{x}_i \mathbin{\hat{+}_K} \vec{y}_i$
  - $._{K^n}$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $i \in [1..n]$ par : $(\lambda \mathbin{._{K^n}} \vec{x})_i = \lambda \vec{x}_i$

Espace vectoriel, exemples

E : espace vectoriel (noté eV par la suite) sur K.

Éléments de E : vecteurs. Éléments de K : scalaires (lettres grecques souvent).

Exemples d'espaces vectoriels :

- pour $n \geq 0$: K^n est un eV ($K^0 = \{0\}$, $K^1 = K$).
  - $\hat{+}_{K^n}$ défini pour tout $i \in [1..n]$ par : $(\vec{x} \mathbin{\hat{+}_{K^n}} \vec{y})_i = \vec{x}_i \mathbin{\hat{+}_K} \vec{y}_i$
  - $._{K^n}$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $i \in [1..n]$ par : $(\lambda \mathbin{._{K^n}} \vec{x})_i = \lambda \vec{x}_i$
- pour $n \geq 1$: si $E_1, \ldots, E_n$ sont eV, alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$ (espace produit) est un eV.
  - $\hat{+}_E$ défini pour tout $i \in [1..n]$ par : $(\vec{x} \mathbin{\hat{+}_E} \vec{y})_i = \vec{x}_i \mathbin{\hat{+}_{E_i}} \vec{y}_i$ dans E_i
  - $._E$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $i \in [1..n]$ par : $(\lambda \mathbin{._E} \vec{x})_i = \lambda \mathbin{._{E_i}} \vec{x}_i$ dans E_i

Espace vectoriel, exemples

E : espace vectoriel (noté eV par la suite) sur K.

Éléments de E : vecteurs. Éléments de K : scalaires (lettres grecques souvent).

Exemples d'espaces vectoriels :

- pour $n \geq 0$: K^n est un eV ($K^0 = \{0\}$, $K^1 = K$).
  - $\hat{+}_{K^n}$ défini pour tout $i \in [1..n]$ par : $(\vec{x} \mathbin{\hat{+}_{K^n}} \vec{y})_i = \vec{x}_i \mathbin{\hat{+}_K} \vec{y}_i$
  - $._{K^n}$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $i \in [1..n]$ par : $(\lambda \ ._{K^n} \vec{x})_i = \lambda \vec{x}_i$
- pour $n \geq 1$: si $E_1, \ldots, E_n$ sont eV, alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$ (espace produit) est un eV.
  - $\hat{+}_E$ défini pour tout $i \in [1..n]$ par : $(\vec{x} \mathbin{\hat{+}_E} \vec{y})_i = \vec{x}_i \mathbin{\hat{+}_{E_i}} \vec{y}_i$ dans E_i
  - $._E$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $i \in [1..n]$ par : $(\lambda \ ._E \vec{x})_i = \lambda \ ._{E_i} \vec{x}_i$ dans E_i
- Soit A un ensemble non vide et E un eV sur K. Alors $\mathcal{F} \overset{\text{def.}}{=} \{f : A \to E\}$ est un eV
  - $\hat{+}_{\mathcal{F}}$ défini pour tout $\vec{x} \in E$ par : $(f \mathbin{\hat{+}_{\mathcal{F}}} g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \mathbin{\hat{+}_E} g(\vec{x})$
  - $._{\mathcal{F}}$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $\vec{x} \in E$ par : $(\lambda \ ._{\mathcal{F}} f)(\vec{x}) = \lambda \ ._E f(\vec{x})$

Espace vectoriel, exemples

E : espace vectoriel (noté eV par la suite) sur K.

Éléments de E : vecteurs. Éléments de K : scalaires (lettres grecques souvent).

Exemples d'espaces vectoriels :

- pour $n \geq 0$: K^n est un eV ($K^0 = \{0\}$, $K^1 = K$).
  - $\hat{+}_{K^n}$ défini pour tout $i \in [1..n]$ par : $(\vec{x} \,\hat{+}_{K^n}\, \vec{y})_i = \vec{x}_i \,\hat{+}_K\, \vec{y}_i$
  - $._{K^n}$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $i \in [1..n]$ par : $(\lambda \,._{K^n} \vec{x})_i = \lambda \vec{x}_i$
- pour $n \geq 1$: si $E_1, \ldots, E_n$ sont eV, alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$ (espace produit) est un eV.
  - $\hat{+}_E$ défini pour tout $i \in [1..n]$ par : $(\vec{x} \,\hat{+}_E\, \vec{y})_i = \vec{x}_i \,\hat{+}_{E_i}\, \vec{y}_i$ dans E_i
  - $._E$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $i \in [1..n]$ par : $(\lambda \,._E \vec{x})_i = \lambda \,._{E_i}\, \vec{x}_i$ dans E_i
- Soit A un ensemble non vide et E un eV sur K. Alors $\mathcal{F} \stackrel{\text{def.}}{=} \{f : A \to E\}$ est un eV
  - $\hat{+}_{\mathcal{F}}$ défini pour tout $\vec{x} \in E$ par : $(f \,\hat{+}_{\mathcal{F}}\, g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \,\hat{+}_E\, g(\vec{x})$
  - $._{\mathcal{F}}$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $\vec{x} \in E$ par : $(\lambda \,._{\mathcal{F}} f)(\vec{x}) = \lambda \,._E\, f(\vec{x})$
- Suites de E (eV): $\mathcal{S} \stackrel{\text{def.}}{=} \{u : \mathbb{N} \to E\}$ est un eV.
  - $\hat{+}_{\mathcal{S}}$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $(u \,\hat{+}_{\mathcal{S}}\, v)_n = u_n \,\hat{+}_E\, v_n$
  - $._{\mathcal{S}}$ défini pour tout $\lambda \in K$ et $n \in \mathbb{N}$ par : $(\lambda \,._{\mathcal{S}} u)_n = \lambda \,._E\, u_n$

Espace vectoriel, propriétés

Proposition 1.1.2.

Pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $\vec{x} \in E$, on a :

1. $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$ et $0.\vec{x} = \vec{0}$,
2. $\lambda.\vec{x} = \vec{0} \iff (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0})$,
3. $(-\lambda).\vec{x} = \lambda.(-\vec{x}) = -(\lambda.\vec{x})$ donc noté $-\lambda.\vec{x}$.

Sommaire

Sous-espace vectoriel, définition et caractérisations

Dorénavant : E est un eV sur K.

Définition 1.1.4.

Soit $F \subset E$ non vide. F est un sous espace vectoriel (seV) de E si la restriction des lois à F confère à F une structure d'espace vectoriel sur K.

Sous-espace vectoriel, définition et caractérisations

Dorénavant : E est un eV sur K.

Définition 1.1.4.

Soit $F \subset E$ non vide. F est un sous espace vectoriel (seV) de E si la restriction des lois à F confère à F une structure d'espace vectoriel sur K.

Propositions 1.1.3. à 1.1.5

Soit $F \subset E$. Alors on a

1. F seV de E $\iff$
   - $F \neq \emptyset$,
   - (i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} \hat{+} \vec{y} \in F$,
   - (ii) $(\forall \lambda \in K, \forall \vec{x} \in F) \Rightarrow \lambda . \vec{x} \in F$.
2. F seV de E $\iff$ (stabilité par combinaison linéaire)
   - $\vec{0}$ est dans F,
   - $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F$ et $\forall \lambda, \mu \in K \Rightarrow \lambda . \vec{x} \hat{+} \mu . \vec{y} \in F$.
3. E, $\{\vec{0}\}$ sont des seV de E.

Sous-espace vectoriel, exemples

- suites finies à valeurs dans K : seV des suites $\mathcal{S}$ à valeurs dans K (eV). C'est $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes.
  - "finie" : pour une suite $u \in \mathcal{S}$, $\exists d(u) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > d(u)$, $u_n = 0$.
- $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ est un seV de $\mathcal{P}$.

Sous-espace vectoriel, propriétés

Propositions 1.1.3. à 1.1.5

Soient F et G deux seV de E.
Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.
Mais en général, $F \cup G$ n'est pas un seV.

Exercice TD1 no 5 : soient F et G des seV de E. Si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, alors il existe $\vec{f} \in F \subset F \cup G$ et $\vec{g} \in G \subset F \cup G$, tels que $\vec{f} \hat{+} \vec{g} \notin F \cup G$ (non stabilité de $\cup$ par $\hat{+}$).

Exemple dans $\mathbb{R}^2$: $F = \{\lambda[1,0], \lambda \in \mathbb{R}\}$, $G = \{\lambda[1,1], \lambda \in \mathbb{R}\}$.
$\vec{f} = [3,0] \in F \subset F \cup G$ et $\vec{g} = [-1,-1] \in G \subset F \cup G$, mais
$\vec{f} + \vec{g} = [2,-1]$ n'est pas dans $F \cup G$ (car ni dans F ni dans G).

Les seV sont stables par combinaison linéaire et par intersection.
Pas stables par union : besoin d'une autre notion...
$\longrightarrow$ la somme de seV.

Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.1.5

Soient F et G deux seV de E. On introduit la **somme** de F et G

$$F \tilde{+} G \overset{\text{def.}}{=} \{\vec{x} \in E \mid \exists \vec{f} \in F, \exists \vec{g} \in G,\ \ \vec{x} = \vec{f} + \vec{g}\}.$$

Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.1.5

Soient F et G deux seV de E. On introduit la **somme** de F et G

$$F \tilde{+} G \overset{\text{def.}}{=} \{\vec{x} \in E \mid \exists \vec{f} \in F, \exists \vec{g} \in G, \ \ \vec{x} = \vec{f} + \vec{g}\}.$$

Proposition 1.1.7

Soient F et G deux seV de E. Alors $F \tilde{+} G$ est un seV de E.

Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.1.5

Soient F et G deux seV de E. On introduit la **somme** de F et G

$$F \tilde{+} G \quad \stackrel{\text{def.}}{=} \quad \{\vec{x} \in E \mid \exists \vec{f} \in F, \exists \vec{g} \in G, \;\; \vec{x} = \vec{f} + \vec{g}\}.$$

Proposition 1.1.7

Soient F et G deux seV de E. Alors $F \tilde{+} G$ est un seV de E.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$: $F = \{\lambda[1,0], \lambda \in \mathbb{R}\}$, $G = \{\lambda[1,1], \lambda \in \mathbb{R}\}$.
$F \tilde{+} G = \{\lambda[1,0] + \mu[1,1], \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Somme directe, supplémentaires

Définition 1.1.6

Soient F et G deux seV de E.

- F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$. On note $F \oplus G$.
- F et G sont supplémentaires si $E = F \oplus G$
  (on a à la fois : $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$).

Somme directe, supplémentaires

Définition 1.1.6

Soient F et G deux seV de E.

- F et G sont en **somme directe** si $F \cap G = \{0\}$. On note $F \oplus G$.
- F et G sont **supplémentaires** si $E = F \oplus G$
  (on a à la fois : $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$).

On a unicité de l'écriture :

Proposition 1.1.8

Soient F et G deux seV de E. Alors
$H = F \oplus G \Longrightarrow \forall \vec{x} \in H, \exists!\ (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$,
et
$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \forall \vec{x} \in E, \exists!\ (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

Attention, erreur dans le poly : pas une équivalence pour H, car on n'a pas $F \tilde{+} G \subset H$ en général.

Somme directe, supplémentaires

Définition 1.1.6

Soient F et G deux seV de E.

- F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$. On note $F \oplus G$.
- F et G sont supplémentaires si $E = F \oplus G$

  (on a à la fois : $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$).

On a unicité de l'écriture :

Proposition 1.1.8

Soient F et G deux seV de E. Alors
$H = F \oplus G \Longrightarrow \forall \vec{x} \in H, \exists! \ (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$,
et
$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \forall \vec{x} \in E, \exists! \ (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

Attention, erreur dans le poly : pas une équivalence pour H, car on n'a pas $F \tilde{+} G \subset H$ en général.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$: $F = \{\lambda[1,0], \lambda \in \mathbb{R}\}$, $G = \{\lambda[1,1], \lambda \in \mathbb{R}\}$.
$F \tilde{+} G = \{\lambda[1,0] + \mu[1,1], \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Sommaire

Famille liée, famille libre

Soit $p \geq 1$ dans $\mathbb{N}$. E est un eV sur K.

Définition 1.2.1, famille liée

Soit $S = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E. S est **liée** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans K non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

Famille liée, famille libre

Soit $p \geq 1$ dans $\mathbb{N}$. E est un eV sur K.

Définition 1.2.1, famille liée

Soit $S = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E. S est **liée** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans K non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

S liée $\Longleftrightarrow \exists (\lambda_i)_{i \in [1..p]} \in K^p$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i = 0$ et $\exists j \in [1..p]$ tq $\lambda_j \neq 0$.

Famille liée, famille libre

Soit $p \geq 1$ dans $\mathbb{N}$. E est un eV sur K.

Définition 1.2.1, famille liée

Soit $S = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E. S est **liée** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans K non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

S liée $\Longleftrightarrow \exists (\lambda_i)_{i \in [1..p]} \in K^p$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i = 0$ et $\exists j \in [1..p]$ tq $\lambda_j \neq 0$.

Définition 1.2.2, famille libre

Soit $S = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille de E. S est **libre** si elle n'est pas liée

Famille liée, famille libre

Soit $p \geq 1$ dans $\mathbb{N}$. E est un eV sur K.

Définition 1.2.1, famille liée

Soit $S = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E. S est **liée** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans K <u>non tous nuls</u> tels que

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

S liée $\Longleftrightarrow \exists (\lambda_i)_{i \in [1..p]} \in K^p$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i = 0$ et $\exists j \in [1..p]$ tq $\lambda_j \neq 0$.

Définition 1.2.2, famille libre

Soit $S = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille de E. S est **libre** si elle n'est pas liée

S libre $\Longleftrightarrow$

$$\left[\forall (\lambda_i)_{i \in [1..p]} \in K^p : \ \left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i = 0\right\} \Longrightarrow \{\forall j \in [1..p] \ \lambda_j = 0\}\right].$$

Famille libre, propriétés 1)

Proposition 1.2.4

Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_p}\}$ une famille libre, et soit $\vec{x} \in E$.
Si $\exists(\lambda_i)_{i\in[1..p]} \in K^p$ tq. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e_i}$,
alors les $(\lambda_i)_{i\in[1..p]}$ sont uniques.

Famille libre, propriétés 2)

Proposition 1.2.3

Soit $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$ une famille libre, et soit $\vec{x} \in E$.
Alors on a :

$$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{x}\} \text{ liée } \iff \exists (\lambda_i)_{i \in [1..p]} \in K^p \text{ tq. } \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e}_i.$$

Proposition C.1.1.1

Soient $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ une famille de $p \geq 1$ vecteurs de E, et $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{p+1})$ $p+1$ vecteurs obtenus par combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{X}$.
Alors la famille $\mathcal{Y}$ est liée.

Famille génératrice

Voir Poly.

Familles : ajouter ou supprimer un vecteur

Propositions 1.2.2 et 1.2.5

Soit $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_p\}$ une famille de p vecteurs de E, soit $\vec{x}$ un vecteur de E. Alors

1. Si $\mathcal{S}$ est liée, alors $\mathcal{S} \cup \{\vec{x}\}$ est liée.
2. Si $\mathcal{S}$ est libre, alors $\forall i \in [1..p]$, $\mathcal{S} \setminus \{\vec{x}_i\}$ est libre.
3. Si $\mathcal{S}$ est génératrice, alors $\mathcal{S} \cup \{\vec{x}\}$ est génératrice.

Familles : ajouter ou supprimer un vecteur

Propositions 1.2.2 et 1.2.5

Soit $\mathcal{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_p\}$ une famille de p vecteurs de E, soit $\vec{x}$ un vecteur de E. Alors

1. Si $\mathcal{S}$ est liée, alors $\mathcal{S} \cup \{\vec{x}\}$ est liée.
2. Si $\mathcal{S}$ est libre, alors $\forall i \in [1..p]$, $\mathcal{S} \setminus \{\vec{x}_i\}$ est libre.
3. Si $\mathcal{S}$ est génératrice, alors $\mathcal{S} \cup \{\vec{x}\}$ est génératrice.

Sommaire

Bases

Définition : voir poly.

Rappel : le cardinal d'un ensemble (fini) est le nombre de ses éléments.

Théorème 1.2.2, existence de bases

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de type fini.
Alors E admet des bases de cardinal fini (≥ 1).

Bases

Définition : voir poly.

Rappel : le cardinal d'un ensemble (fini) est le nombre de ses éléments.

Théorème 1.2.2, existence de bases

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de type fini.
Alors E admet des bases de cardinal fini (≥ 1).

Lemme

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de type fini. Soit $\mathcal{B}$ une base de E de cardinal $n \geq 1$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Alors $\mathrm{card}(\mathcal{L}) \leq n$.

Bases

Définition : voir poly.

Rappel : le cardinal d'un ensemble (fini) est le nombre de ses éléments.

Théorème 1.2.2, existence de bases

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de type fini.
Alors E admet des bases de cardinal fini (≥ 1).

Lemme

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de type fini. Soit $\mathcal{B}$ une base de E de cardinal $n \geq 1$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Alors $\mathrm{card}(\mathcal{L}) \leq n$.

Théorème 1.2.4

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de type fini.
Alors toutes ses bases ont le même nombre d'éléments.

Dimension, Base incomplète

Définition 1.2.8, dimension

Soit $E \neq \{0\}$ de type fini. On appelle **dimension** de E, notée $\dim(E)$, le cardinal d'une base quelconque de E.
Si $E = \{\vec{0}\}$, on pose $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Dimension, Base incomplète

Définition 1.2.8, dimension

Soit $E \neq \{0\}$ de type fini. On appelle **dimension** de E, notée $\dim(E)$, le cardinal d'une base quelconque de E.
Si $E = \{\vec{0}\}$, on pose $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Théorème (proche du Thm 1.2.1)

Soit E de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. Alors $\text{card}(\mathcal{L}) \stackrel{\text{def.}}{=} r \leq n$. Si $\mathcal{G}$ est un ensemble générateur de E, alors il existe $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ de cardinal $n - r$, tq. $\mathcal{B} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{L} \cup \mathcal{S}$ est une base de E.

Dimension, Base incomplète

Définition 1.2.8, dimension

Soit $E \neq \{0\}$ de type fini. On appelle **dimension** de E, notée $\dim(E)$, le cardinal d'une base quelconque de E.
Si $E = \{\vec{0}\}$, on pose $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Théorème (proche du Thm 1.2.1)

Soit E de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. Alors $\mathrm{card}(\mathcal{L}) \overset{\text{def.}}{=} r \leq n$. Si $\mathcal{G}$ est un ensemble générateur de E, alors il existe $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ de cardinal $n - r$, tq. $\mathcal{B} \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{L} \cup \mathcal{S}$ est une base de E.

Théorème 1.2.3, base incomplète

Soit E un espace vectoriel de type fini. Si $\mathcal{L} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r\}$ est une famille libre de E, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui vérifie $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

Familles et dimension

Proposition 1.2.7

Soit E un eV de dimension n ($n \geq 1$).
Soit $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, ..., \vec{f_p}\}$ une famille de p vecteurs de E.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre et si $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E et si $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
3. Si $p > n$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
4. Si $p < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E.

Familles et dimension

Proposition 1.2.7

Soit E un eV de dimension n ($n \geq 1$).
Soit $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, ..., \vec{f_p}\}$ une famille de p vecteurs de E.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre et si $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E et si $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
3. Si $p > n$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
4. Si $p < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E.

Corollaire 1.2.1

Soit E un eV de dimension finie.

1. Si E contient une famille libre de p vecteurs, alors $\dim E \geq p$.
2. Si E contient une famille génératrice de q vecteurs, alors $\dim E \leq q$.

Dimension de seV

Proposition 1.2.8

Soit E un eV de dimension n. Soient F et G deux seV de E. Alors on a :

1. $\dim(F) \leq \dim(E)$,
2. $\dim(F) = \dim(E) \iff E = F$,
3. $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
4. $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
5. $E = F \oplus G \iff \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$
6. $E = F \oplus G \iff \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $E = F + G$