

MT12 - P2026 - Examen médian

Durée 1h30 – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème : 6 points*)(Questions de cours)

1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que l'application définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E . Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), montrer que l'application

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x, y \in E,$$

où les x_i et y_i désignent les coordonnées de x et y , est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^n$ et donner l'expression de la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soit f une fonction a -périodique et continue par morceaux sur \mathbb{R} . Rappeler la définition des coefficients de Fourier complexes et réels de f , i.e., la définition de $c_n(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Par ailleurs, montrer que si f est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$.
3. Soit $N \geq 1$, on note $\omega_N = e^{2i\frac{\pi}{N}}$. Donner la définition de la transformée de Fourier discrète d'ordre N .

Exercice 2 (*barème : 6 points*)(Exercice de synthèse)

Soit f la fonction 2π -périodique avec

$$f(t) = t^2 \quad \text{si } t \in]-\pi, \pi[.$$

1. Dessiner le graphe de f .
2. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Donner l'expression de la somme partielle d'ordre $N \geq 1$, notée f_N , de la série de Fourier de f .
3. Etudier la convergence simple de la suite $(f_N)_{N \geq 1}$ sur \mathbb{R} . Peut-on dire que f est développable en sa série de Fourier en tout point de \mathbb{R} ?
4. Est-ce que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} ?
5. Justifier la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Enfin justifier la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Tournez la page

Exercice 3 (*barème : 8 points*)(À la frontière du théorème de Dirichlet)

Soit g une fonction 2π -périodique et définie par

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, \pi], \\ \sqrt{-x} & \text{si } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de g .
2. Quelle est la parité de g et que peut-on en déduire sur les coefficients réels de Fourier de g ?
3. Sans calculer explicitement les coefficients de Fourier de g , déduire de la question précédente l'expression générale de la somme partielle d'ordre $N \geq 1$, notée g_N , associée à la série de Fourier de g .
4. Rappeler précisément l'énoncé du théorème de Dirichlet.
5. Démontrer que g n'est pas dérivable par morceaux en $x = 0$.
6. Peut-on alors déduire du théorème de Dirichlet que g est développable en sa série de Fourier sur \mathbb{R} ?

Dans la suite on veut démontrer (au moins partiellement) que g est développable en série de Fourier sur \mathbb{R} . Pour ce faire, on veut montrer que pour tout $n \geq 1$ il existe une constante $C > 0$ indépendante de n vérifiant :

$$|a_n(g)| \leq \frac{C}{n^{3/2}}. \quad (1)$$

7. Calculer $a_0(g)$.
8. Soit $n \geq 1$ quelconque fixé
 - (a) en utilisant un changement de variable démontrer que

$$a_n(g) = \frac{4}{\pi n^{3/2}} \int_0^{\sqrt{n\pi}} t^2 \cos(t^2) dt.$$

- (b) En déduire que

$$a_n(g) = -\frac{2}{\pi n^{3/2}} \int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(t^2) dt.$$

9. Dans la suite on admet que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\left| \int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(t^2) dt \right| \leq \frac{3}{2}.$$

- (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $|a_n(g)| \leq \frac{3}{\pi n^{3/2}}$.
- (b) En déduire que la série de Fourier de g converge normalement sur \mathbb{R} .

Conclusion. Il est alors possible de montrer que pour une fonction f continue et 2π -périodique si sa série de Fourier converge normalement (en fait uniformément est suffisant) sur \mathbb{R} alors cette série admet comme limite f . Ceci permet de conclure que la série de Fourier de g converge vers g sur \mathbb{R} même si les hypothèses du théorème de Dirichlet ne sont pas vérifiées!