Université de Technologie de Compiègne

MT12 -Final-A25
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.
Les formules utiles sont rappelées à la fin de l'énoncé.

Exercice 1. (5 points)

1. Soit α un réel positif.
   (a) Pour quelle valeurs de α la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(1+n^2)^\alpha}$ est convergente ? Justifier.
   (b) Pour quelle valeurs de α la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(1+n^2)^\alpha}$ est divergente ? Justifier.
2. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction suivante : $f(x) = 1 - \cos(x)$.
   (a) f appartient-elle à à $L^1(\mathbb{R})$?
   (b) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. La fonction g appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$?
   (c) La fonction g appartient-elle à $L^2(\mathbb{R})$? Justifier.

Exercice 2. (4 points) On considère pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'intégrale à paramétrer suivante :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x} dx.$$

1. Calculer $F(0)$.
2. Montrer que F est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, en donnant l'expression de $F'(t)$.
5. En déduire une expression simplifiée de $F'(t)$, puis la forme générale de $F(t)$. (Aidez vous du point (5) du rappel).
6. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$

Exercice 3. (5 points)

1. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

   (a) Montrer que f est une fonction paire et que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que le produit de convolution $(f \star f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y)f(x-y)dy$ est une fonction paire, bien définie.
   (c) Calculer la transformée de Fourier de f.
   (d) Calculer explicitement la fonction $f \star f$.
   (e) En déduire la transformée de Fourier de $f \star f$.
2. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$-g''(x) + g(x) = f(x).$$

   (a) On suppose que g et g'' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$. Exprimer la transformée de Fourier de g'' en fonction de celle de g.
   (b) Calculer la transformée de Fourier de g.
   (c) En déduire la forme générale de g.

Exercice 4. (5 points)

1. Soit N un entier plus grand que 1. On considère pour tout entier $0 \leq \ell \leq N-1$ les échantillons N-périodiques suivants :

$$f_k^\ell = \cos\left(2\pi\ell\frac{k}{N}\right) \quad \text{et} \quad g_k^\ell = \sin\left(2\pi\ell\frac{k}{N}\right) \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, N-1.$$

Tournez la page S.V.P

(a) Calculer les coefficients de Fourier discrets de ces échantillons. (Aidez vous du point (5) du rappel).

(b) En déduire les coefficients de Fourier discrets des échantillons

$$f_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} f_k^\ell \quad \text{et} \quad g_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} g_k^\ell, \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, N-1.$$

(c) Soit

$$h_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_{k-j} g_j \qquad k = 0, \cdots, N-1,$$

Trouver les coefficients de Fourier discrets de cet échantillon.

Rappel

1. Transformée de Fourier : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f par la fonction suivante :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

2. Transformée de Fourier inverse : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier inverse de f par la fonction suivante :

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

3. Coefficients de Fourier discrets : Soit $f = (f_0, f_2, \cdots, f_{N-1})$ un échantillon N-périodique de $\mathbb{C}^N$, alors les coefficients de Fourier discrets de f sont définis comme suit :

$$c_n^N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n \frac{k}{N}} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

4. Formule des accroissements finis : Pour tout $u \geq 0$, il existe une constante $0 < \theta < 1$ telle que

$$\sin u = \cos(\theta u) u.$$

Pour tout $u \geq 0$, il existe une constante $0 < \theta < 1$ telle que

$$\cos u = 1 - \frac{1}{2} \cos(\theta u) u^2.$$

5. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)), \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)), \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$