Université de Technologie de Compiègne

MT12 - Novembre 2025- Médian
Durée : 1h30.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.
Les formules utiles sont rappelées à la fin de l'énoncé.

Exercice 1. (6 points)

1. Soient $0 < \alpha < 1$ et f une fonction continue définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété suivante :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}, \quad \text{pour tout } x, y \in [0,1].$$

On considère pour un entier naturel $N \geq 1$ les points $x_k = \frac{k}{N}$, pour $k = 0, \cdots, N$ et on note

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

Montrer qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$|I - I_N| \leq \frac{\beta}{N^{\alpha}}, \quad \text{avec} \quad I = \int_0^1 f(x)dx,$$

en précisant la valeur de β.

2. Calculer, en utilisant la somme de Riemann I_N, les limites suivantes :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+N}, \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+N)^2}.$$

3. Soit $g(x) = \sin^2(x)$. Calculer $g'(x), g''(x), g^{(3)}(x), g^{(4)}(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.
4. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange (rappelée ci-dessous) pour $n = 1$, que

$$\sin^2(x) \leq x^2 \quad \text{pour tout } 0 < x < 1.$$

5. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour $n = 3$, que

$$x^2 - \frac{x^4}{3} \leq \sin^2(x) \quad \text{pour tout } 0 < x < 1.$$

6. En déduire, en utilisant les question (2)-(4)-(5), la limite suivante :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+N}}\right).$$

Rappel (Formule de Taylor-Lagrange) Soient n un entier et f une fonction $n+1$ fois dérivables sur $[0,1]$. Alors pour tout $0 < x < 1$, il existe $0 < c < x$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Exercice 2. (4 points) Soit $E = C^0([a,b], \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ (avec $-\infty < a < b < +\infty$). On considère l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \quad & E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & f \longrightarrow \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx. \end{aligned}$$

1. Montrer que cette application définie une norme sur E.
2. Cette norme est-elle induite par un produit scalaire ? Justifier.

Tournez la page S.V.P

Exercice 3. (10 points) Soit f la fonction 2π-périodique impaire définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Représenter f graphiquement sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)dx = -(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx.$$

4. En déduire les coefficients de Fourier $b_n(f)$ lorsque n est paire ($n = 2p$ avec $p \geq 1$).
5. On suppose que n est un entier impaire, $n = 2p+1$ avec $p \geq 0$, préciser dans ce cas les valeurs de $\cos(\frac{n\pi}{2})$ et $\sin(\frac{n\pi}{2})$, en fonction de p. Puis, calculer les coefficients de Fourier $b_n(f)$.
6. Déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

7. Y-a-t-il convergence ponctuelle de la somme partielle des séries de Fourier vers f sur $\mathbb{R}$? Justifier.
8. Y-a-t-il convergence uniforme de la somme partielle des séries de Fourier vers f sur $\mathbb{R}$? Justifier.
9. En déduire la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

10. Soit $-1 \leq \alpha \leq 1$, que vaut la somme suivante :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin\left(\pi\alpha\left(p + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Rappel

1. Coefficients de Fourier : Soit f une fonction continue par morceaux T-périodique, alors les coefficients de Fourier de f sont définis comme suit :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i(\frac{2\pi nx}{T})}dx, \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx, \quad \text{pour} \quad n \geq 0$$
$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx. \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

2. Égalité de Parseval : Soit f une fonction continue par morceaux T-périodique, alors on l'égalité suivante :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{(a_0(f))^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2).$$

3. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)), \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)), \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$