

Cours 2 MT09. Résolution de systèmes linéaires

Antoine Zurek

LMAC - UTC

I. Introduction

1. Cadre d'étude
2. Cas des matrices triangulaires supérieures ou inférieures

II. Méthode d'élimination de Gauss

1. Exemple
2. Cas général

III. Décomposition LU

1. Deux applications
 - 1.1. Résolution de systèmes linéaires
 - 1.2. Calcul optimal de l'inverse d'une matrice
2. Construction de la décomposition LU
3. Calcul direct de la décomposition LU (algo. Doolittle)
4. Faisabilité de la décomposition LU

Table of contents

I. Introduction

1. Cadre d'étude
2. Cas des matrices triangulaires supérieures ou inférieures

II. Méthode d'élimination de Gauss

1. Exemple
2. Cas général

III. Décomposition LU

1. Deux applications
 - 1.1. Résolution de systèmes linéaires
 - 1.2. Calcul optimal de l'inverse d'une matrice
2. Construction de la décomposition LU
3. Calcul direct de la décomposition LU (algo. Doolittle)
4. Faisabilité de la décomposition LU

1. Cadre d'étude

On cherche à résoudre un système linéaire de la forme :

$$Ax = b$$

avec

$$A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \quad x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

On suppose dans la suite que A est inversible

$\Rightarrow$ Existence et unicité (théorique) d'une solution à $Ax = b$

Question. En pratique comment calculer la solution de manière efficace ?

2. Cas des matrices triangulaires supérieures ou inférieures

Si A est triangulaire supérieure (inversible) la solution de $Ax = b$ est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = b_n / a_{n,n} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) / a_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j) / a_{i,i} \\ \vdots \\ x_1 = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1,j}x_j) / a_{1,1} \end{array} \right.$$

À retenir

→ Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est **triangulaire sup. ou inf.**, il faut **n^2 opérations** pour résoudre le système $Ax = b$

Table of contents

I. Introduction

1. Cadre d'étude
2. Cas des matrices triangulaires supérieures ou inférieures

II. Méthode d'élimination de Gauss

1. Exemple
2. Cas général

III. Décomposition LU

1. Deux applications
 - 1.1. Résolution de systèmes linéaires
 - 1.2. Calcul optimal de l'inverse d'une matrice
2. Construction de la décomposition LU
3. Calcul direct de la décomposition LU (algo. Doolittle)
4. Faisabilité de la décomposition LU

1. Exemple

Résoudre $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Exemple

Résoudre $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

À retenir

- Les coefficients $a_{11}^{(1)}$ et $a_{22}^{(2)}$ sont appelés **pivots**
- La méthode fonctionne si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ et $a_{22}^{(2)} \neq 0$
- On a la décomposition $A = LU$ (à vérifier) avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = A^{(3)}$$

2. Cas général

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & x & \dots & x \\ x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \vdots & x \end{pmatrix}}_{=A^{(1)}(=A)} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \color{red}{x} & \color{red}{x} & \dots & \color{red}{x} \\ 0 & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \vdots & x \end{pmatrix}}_{=A^{(2)}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \color{red}{x} & \color{red}{x} & \dots & \color{red}{x} \\ 0 & \color{red}{x} & \dots & \color{red}{x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & x \end{pmatrix}}_{=A^{(3)}} \rightarrow \text{etc}$$

2. Cas général

À retenir $(A^{(k)}, b^{(k)}) \xrightarrow{\text{Etape } k} (A^{(k+1)}, b^{(k+1)})$

→ On garde les k lignes de $A^{(k)}$ et on modifie les $n - k$ lignes restantes avec

$$\underline{A}_i^{(k+1)} = \underline{A}_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \underline{A}_k^{(k)} = \underline{A}_i^{(k)} - \ell_{ik} \underline{A}_k^{(k)} \quad i = k+1, \dots, n$$

→ $\underline{A}_i^{(k+1)} = \underline{A}_i^{(k)}$ pour $i = 1, \dots, k$

→ On modifie également $b^{(k)}$ avec

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} b_k^{(k)} \quad i = k+1, \dots, n$$

Table of contents

I. Introduction

1. Cadre d'étude
2. Cas des matrices triangulaires supérieures ou inférieures

II. Méthode d'élimination de Gauss

1. Exemple
2. Cas général

III. Décomposition LU

1. Deux applications
 - 1.1. Résolution de systèmes linéaires
 - 1.2. Calcul optimal de l'inverse d'une matrice
2. Construction de la décomposition LU
3. Calcul direct de la décomposition LU (algo. Doolittle)
4. Faisabilité de la décomposition LU

1.1. Résolution de systèmes linéaires

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LUx = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ly = b & \text{"descente"} \\ Ux = y & \text{"remontée"} \end{cases}$$

À retenir

→ Si A admet une décomposition $A = LU$, alors résoudre $Ax = b$ est équivalent à résoudre **deux systèmes linéaires triangulaires**

1.2. Calcul optimal de l'inverse d'une matrice

Objectif : On cherche $X \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = I$ ($X = A^{-1}$)

$$\begin{aligned} AX = I &\Leftrightarrow AX_j = e_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow LUX_j = e_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, on détermine X_j en résolvant :

$$\begin{cases} LY_j = e_j & \text{"descente"} \\ UX_j = Y_j & \text{"remontée"} \end{cases}$$

À retenir

→ On peut calculer efficacement A^{-1} en $O(n^3)$ opérations

2. Construction de la décomposition LU

2. Construction de la décomposition LU

À retenir : Si A est **inversible** et $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour tout k alors

→ A admet la décomposition :

$$A = L U$$

avec L tri inf à diagonale unité et $U = A^{(n)}$ tri sup

→ $\det(A) = \det(U)$

Théorème 2.2.2.

Si A est inversible et au cours de l'élimination de Gauss **les pivots sont non nuls**, alors **il existe** L matrice tri inf et U matrice tri sup vérifiant $A = LU$. Si on impose que L est à **diagonale unité** alors la décomposition $A = LU$ est **unique**

3. Calcul direct de la décomposition LU (algo. Doolittle)

3. Calcul direct de la décomposition LU (algo. Doolittle)

À retenir : si on connaît $\underline{U}_1, \underline{L}_1, \dots, \underline{U}_{k-1}, \underline{L}_{k-1}, \underline{U}_k$ on détermine

$$\rightarrow \underline{L}_k \text{ via } A_k = \underline{L} \underline{U}_k = u_{1,k} \underline{L}_1 + u_{2,k} \underline{L}_2 + \dots + u_{k,k} \underline{L}_k$$

$$\Rightarrow \underline{L}_k = \frac{1}{u_{kk}} (A_k - u_{1,k} \underline{L}_1 - u_{2,k} \underline{L}_2 + \dots - u_{k-1,k} \underline{L}_{k-1})$$

$$\rightarrow \underline{U}_{k+1} \text{ via } \underline{A}_{k+1} = \underline{L}_{k+1} \underline{U} = \ell_{k+1,1} \underline{U}_1 + \dots + \ell_{k+1,k} \underline{U}_k + \underline{U}_{k+1}$$

$$\Rightarrow \underline{U}_{k+1} = \underline{A}_{k+1} - \ell_{k+1,1} \underline{U}_1 - \dots - \ell_{k+1,k} \underline{U}_k$$

4. Faisabilité de la décomposition LU.

Question. Est-ce que si A est inversible $\Rightarrow A = LU$?

4. Faisabilité de la décomposition LU.

Question. Est-ce que si A est inversible $\Rightarrow A = LU$?

Réponse. Non ! Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\det(A) = -1$, donc A inversible mais $a_{11}^{(1)} = 0...$

Question. Est-il possible de trouver un critère assurant une décomposition LU d'une matrice inversible ?

4. Faisabilité de la décomposition LU.

Définition 2.4.1.

On appelle sous-matrice principale d'ordre $k \in \{1, \dots, n\}$ de la matrice A , la matrice notée $[A]_k$ avec

$$[A]_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$$

4. Faisabilité de la décomposition LU.

Définition 2.4.1.

On appelle sous-matrice principale d'ordre $k \in \{1, \dots, n\}$ de la matrice A , la matrice notée $[A]_k$ avec

$$[A]_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$$

Théorème 2.4.2.

On a les équivalences suivantes :

1. Tous les pivots $a_{kk}^{(k)}$ sont définis et $a_{kk}^{(k)} \neq 0$
2. A admet une décomposition $A = LU$ avec U inversible
3. $[A]_1, [A]_2, \dots, [A]_n$ sont toutes inversibles

4. Faisabilité de la décomposition LU.

Définition 2.4.1.

On appelle sous-matrice principale d'ordre $k \in \{1, \dots, n\}$ de la matrice A , la matrice notée $[A]_k$ avec

$$[A]_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$$

Théorème 2.4.2.

On a les équivalences suivantes :

1. Tous les pivots $a_{kk}^{(k)}$ sont définis et $a_{kk}^{(k)} \neq 0$
2. A admet une décomposition $A = LU$ avec U inversible
3. $[A]_1, [A]_2, \dots, [A]_n$ sont toutes **inversibles**

À retenir

- Si $[A]_1, [A]_2, \dots, [A]_n$ sont toutes **inversibles** alors A est inversible et admet une décomposition $A = LU$
- Si A est juste inversible $\nRightarrow [A]_1, [A]_2, \dots, [A]_n$ toutes **inversibles**