Cours 4 MT09. Normes matricielles et conditionnement

Antoine Zurek

LMAC - UTC

I. Normes matricielles
1. Normes vectorielles
2. Normes matricielles
3. Etude des NMS $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_\infty$
4. Etude de le NMS $|||\cdot|||_2$
   4.1. Résultat préliminaire et rayon spectral
   4.2. Résultat sur la NMS $|||\cdot|||_2$

II. Conditionnement d'un système linéaire
1. Problème de conditionnement d'une matrice
2. Conditionnement d'une matrice
3. Lien entre conditionnement et erreurs

Table of contents

I. Normes matricielles

1. Normes vectorielles
2. Normes matricielles
3. Etude des NMS $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_\infty$
4. Etude de le NMS $|||\cdot|||_2$
   - 4.1. Résultat préliminaire et rayon spectral
   - 4.2. Résultat sur la NMS $|||\cdot|||_2$

II. Conditionnement d'un système linéaire

1. Problème de conditionnement d'une matrice
2. Conditionnement d'une matrice
3. Lien entre conditionnement et erreurs

1. Normes vectorielles

Dans la suite on note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 2.6.1.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., on appelle norme vectorielle sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$, notée $\|\cdot\|$, et vérifiant :

- $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_E$
- $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$, pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$

2. Normes matricielles

Définition 2.6.2. (Norme matricielle)

On appelle norme matricielle (NM) une application de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$, (encore) notée $\|\cdot\|$, et vérifiant :

- $\|A\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0_{\mathcal{M}_{n,n}}$
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ pour tout A, $A \in \mathcal{M}_{n,n}$
- $\|A\,B\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour tout $A\,B \in \mathcal{M}_{n,n}$

Définition 2.6.3. (Norme matricielle subordonnée)

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On appelle norme matricielle subordonnée (NMS), notée $|||\cdot|||$, une norme matricielle définie par :

$$|||A||| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|A\,x\|}{\|x\|}$$

3. Etude des NMS $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_\infty$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ alors

- $|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|A_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$
- $|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \|\underline{A}_i\|_1 = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$

Exemple. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

alors

$$|||A|||_1 = \max\left(\|A_1\|_1, \|A_2\|_1, \|A_3\|_1\right) = \max(4, 6, 8) = 8$$
$$|||A|||_\infty = \max\left(\|\underline{A}_1\|_1, \|\underline{A}_2\|_1, \|\underline{A}_3\|_1\right) = \max(4, 7, 7) = 7$$

4.1. Résultat préliminaire et rayon spectral

Théorème 2.6.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique alors

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{x^\top A x}{x^\top x} = \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres réelles de A

4.1. Résultat préliminaire et rayon spectral

Théorème 2.6.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique alors

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{x^\top A x}{x^\top x} = \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres réelles de A

Définition 2.6.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on appelle rayon spectral de A, noté $\rho(A)$, le nombre réel

$$\rho(A) = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A

4.2. Résultat sur la NMS $|||\cdot|||_2$

Théorème 2.6.2.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ alors

$$|||A|||_2^2 = \rho\left(A^\top A\right) = \rho\left(A\,A^\top\right)$$

2. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique alors

$$|||C|||_2 = \rho(C)$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ alors

$$|||A|||_2^2 = |||A\,A^\top|||_2 = |||A^\top A|||_2$$

Table of contents

I. Normes matricielles
1. Normes vectorielles
2. Normes matricielles
3. Etude des NMS $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_\infty$
4. Etude de le NMS $|||\cdot|||_2$
   4.1. Résultat préliminaire et rayon spectral
   4.2. Résultat sur la NMS $|||\cdot|||_2$

II. Conditionnement d'un système linéaire
1. Problème de conditionnement d'une matrice
2. Conditionnement d'une matrice
3. Lien entre conditionnement et erreurs

1. Problème de conditionnement d'une matrice

Lors de la résolution d'un système linéaire $Ax = b$, alors on a

$$x = x(b) = A^{-1}b$$

Question. Une petite variation de b induit une petite ou une grande variation de x ?

1. Problème de conditionnement d'une matrice

Exemple. Soit A inversible avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $b = (1,0)^\top$ alors la solution de $Ax = b$ est $x = x(b) = (1,0)^\top$

Soit $\delta b = (0, 10^{-2})^\top$ alors la solution x' de $Ax' = b + \delta b$ est

$$x' = x'(b + \delta b) = \begin{pmatrix} 1 - 10^{10}\, 10^{-2} \\ 10^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 10^{8} \\ 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, en notant $\delta x = x - x' = (10^8, -10^{-2})^\top$ on a

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 10^8 = 10^{10}\, 10^{-2} = 10^{10} \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

La matrice A du système linéaire $Ax = b$ est dite mal conditionnée

Question. Comment quantifier le conditionnement d'une matrice ?

2. Conditionnement d'une matrice

Définition 2.7.1.

On appelle conditionnement de A relatif à une NMS donnée

$$\chi(A) = |||A||| \, |||A^{-1}|||$$

Exemple. Dans l'exemple précédent, on a $\chi_\infty(A) = \left(1 + 10^{10}\right)^2$

Remarque. On a toujours

$$1 = |||I||| = |||A\,A^{-1}||| \leq |||A||| \, |||A^{-1}||| = \chi(A)$$

Proposition 2.7.1.

Si A est symétrique (et inversible) alors

$$\chi_2(A) = |||A|||_2 \, |||A^{-1}|||_2 = \frac{\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}{\min_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les v.p. de A.

3. Lien entre conditionnement et erreurs

Théorème 2.7.2.

1. Soit le système $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$ (perturbation de b) alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \chi(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

2. Soit le système $Ax = b$ et $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ (perturbation de A) alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \chi(A) \frac{|||\delta A|||}{|||A|||}$$