

MT12 - TP3 : Intégration numérique et convergence des séries de Fourier

Avril 2023

Dans ce TP on étudie la convergence ou la non-convergence des séries de Fourier de certaines fonctions. On commence dans un premier temps par une méthode permettant d'approcher la valeur de l'intégrale d'une fonction.

1 Intégration d'une fonction continue sur un intervalle borné

Soit $[a, b]$ ($a < b$) un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. Afin d'obtenir une valeur approchée de

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

on utilise la méthode des rectangles (voir la Figure 1 pour une illustration) pour obtenir un encadrement de l'intégrale de Riemann :

$$I_-(N) \leq \int_a^b f(x) dx \leq I_+(N),$$

où $N \geq 1$ est un entier naturel fixé et avec

$$I_-(N) = h \sum_{k=1}^N \min \{f(x) : x \in [a + (k-1)h, a + kh]\}, \quad (1)$$

$$I_+(N) = h \sum_{k=1}^N \max \{f(x) : x \in [a + (k-1)h, a + kh]\}, \quad (2)$$

où $h = \frac{b-a}{N}$.

Dans un premier temps on veut programmer une fonction **Scilab**

```
1 [Imoins,Iplus,N] = Riemann(f, a, b, epsilon)
```

qui retourne un entier $N = N(\varepsilon)$ (idéalement le plus petit possible) et un encadrement de l'intégrale I avec une précision ε imposée et garantissant

$$I_+(N) - I_-(N) \leq \varepsilon, \quad (3)$$

on a toujours $0 \leq I_+(N) - I_-(N)$.

1. Que fait la première ligne commentée dans le code suivant ? Complétez le code suivant afin d'obtenir une valeur approchée de I .

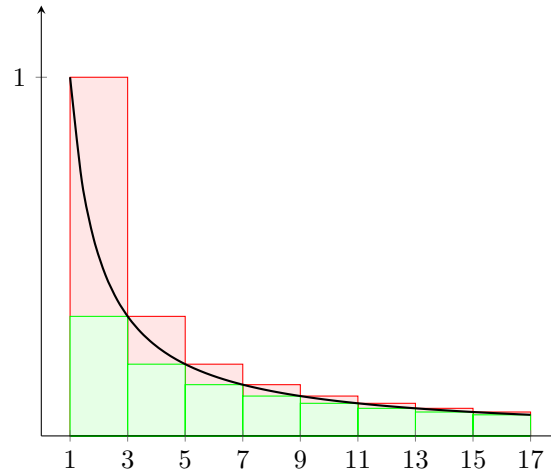


FIGURE 1 – Illustration de la méthode des rectangles pour la fonction $x : [1, 17] \mapsto 1/x$. La somme $I_-(N)$ est représentée par les rectangles verts et $I_+(N)$ par les rectangles rouges (ici $N = 8$).

```

1 function [Imoins, Iplus, N] = Riemann(f, a, b, epsilon)
2     nsubdiv = 20; // Voir la Remarque juste apres
3     N = 1;
4     done = %F;
5     while (~done)
6         N = 2 * N;
7         Imoins = 0;
8         Iplus = 0;
9         for k = 1:N
10             Ik = [ a+(k-1)*(b-a)/N, a+k*(b-a)/N ]; // (1)
11             subdiv = linspace(Ik(1), Ik(2), nsubdiv) ; // Subdivision de l'intervalle
12             fmin = ...;
13             fmax = ...;
14             Imoins = ...;
15             Iplus = ...;
16         end
17         Imoins = ...;
18         Iplus = ...;
19         done = (Iplus - Imoins) < epsilon;
20     end; // (while)
21 endfunction

```

Remarque. En pratique, le min et le max qui interviennent dans les formules (1) et (2) ci-dessus seront évalués (approchés) sur une grille plus fine (20 points par subdivision par exemple). Pour cela, pour évaluer le max (ou le min) de f sur les intervalles de la forme $[a + (k - 1)h, a + kh[$ pour $1 \leq k \leq N$ on considère :

$$f_k^{\min} = \min_{j \in \{0, 19\}} f(a + (k - 1)h + jh/20), \quad f_k^{\max} = \max_{j \in \{0, 19\}} f(a + (k - 1)h + jh/20),$$

puis

$$I_-(N) = h \sum_{k=1}^N f_k^{\min}, \quad I_+(N) = h \sum_{k=1}^N f_k^{\max}.$$

On pourra commencer l'algorithme en choisissant un "petit" N (par exemple $N = 3$). Si le test (3) n'est pas satisfait, on multipliera N par 2, puis on répétera l'opération jusqu'à ce que la condition (3) soit satisfaite, ce qui retournera `Imoins`, `Iplus` et `N`.

Tester sur l'exemple

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx$$

en prenant $\varepsilon = 10^{-4}$. Calculer cette même valeur à l'aide de `integrate`, calculez la valeur exacte de l'intégrale et comparez ces trois valeurs.

2. En reprenant le TD du chapitre 1 vous pouvez écrire un code `scilab` permettant d'approcher la valeur de I par la méthode des rectangles à gauche (question supplémentaire).

2 Convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction périodique régulière

On considère la fonction périodique f de période $T = 2$ définie sur l'intervalle $[0, 2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Cette fonction est étendue sur $\mathbb{R}$ de manière périodique. En `Scilab`, tracer la fonction f sur l'intervalle $[0, 2]$ (on pourra se reporter aux derniers exercices du TP1).

Calculer les coefficients de Fourier de f

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^2 f(x) \cos(k\pi x) dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

et

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^2 f(x) \sin(k\pi x) dx, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $N \geq 1$ on définit la suite de fonctions $(f_N)_{N \geq 1}$ par

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)).$$

Montrer que $a_{2k} = 0$ pour tout $k \geq 1$. Montrer, via un changement d'indice, que pour tout $N \geq 0$ on a

$$f_{2N+1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^N \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}.$$

Sur l'intervalle $[0, 2]$ comparer graphiquement les fonctions f_{2N+1} et f . On tracera en `Scilab` ces courbes pour les différentes valeurs de N suivantes : $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ et 256 .

Y a-t-il convergence ponctuelle (uniforme) ? Si oui est-ce que ce résultat est conforme à un théorème vu en cours (lequel) ?

3 Phénomène de Gibbs pour une fonction périodique discontinue

On considère la fonction périodique f de période $T = 2$ définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Cette fonction est étendue sur $\mathbb{R}$ de manière périodique. En **Scilab**, tracer la fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Calculer les coefficients de Fourier de f . En particulier on vérifiera que $a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On définit alors la suite de fonctions $(f_N)_{N \geq 1}$ par

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^N b_k \sin(k\pi x).$$

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, comparer graphiquement les fonctions f_N et f . On tracera en **Scilab** les courbes pour les valeurs de $N = 2, 4, 8, 16, 32$ et 256 .

Que vaut $f_N(0)$ et $f_N(0) - f(0)$ pour tout $N \geq 1$? Y a-t-il visuellement convergence ponctuelle vers f ? Si ce n'est pas le cas, pour quel point de $] -1, 1[$, n'y a-t-il pas convergence? Est-ce cohérent avec un théorème vu en cours? Vers quelle valeur converge la suite $(f_N(0))_{N \geq 1}$?

3. On veut illustrer la convergence de $(f_N)_{N \geq 1}$ vers f en norme $L^2([-1, 1])$. Pour ce faire on approche la norme L^2 de la différence par la méthode des rectangles à gauche, à savoir,

$$\|f - f_N\|_{L^2([-1, 1])}^2 \approx \frac{2}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \left| f\left(-1 + i \frac{2}{K}\right) - f_N\left(-1 + i \frac{2}{K}\right) \right|^2 = J_{K,N},$$

où $K \in \mathbb{N}^*$ est donné. Fixons $K = 600$, écrire un code **Scilab** permettant de calculer $J_{K,N}$ la valeur approchée de $\|f - f_N\|_{L^2([-1, 1])}^2$. De plus afficher les valeurs de $J_{K,N}$ pour 64, 128, 256, 512, 1024 et 2048. Vers quelle valeur semble converger la suite $(J_{K,N})_{N \geq 1}$? Est-ce cohérent avec un résultat du cours (lequel)?

4 Non convergence pour une fonction continue

On considère à présent la fonction périodique f de période $T = 2$ définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ x^{1/10} & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Cette fonction est étendue sur $\mathbb{R}$ de manière périodique. En **Scilab**, tracer la fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Montrer que le coefficient de Fourier d'ordre 0 de f vérifie $a_0 = 10/11$. Les coefficients de Fourier de f d'ordre supérieur étant complexe à calculer on va approcher a_k et b_k en utilisant la fonction **integrate** (on peut aussi utiliser la valeur donnée par **Imoins** ou **Iplus**). Écrire une fonction **Scilab** permettant de calculer la somme partielle de Fourier de f

$$f_N(x) = \frac{5}{11} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)), \quad \text{for } N \geq 1.$$

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, comparer graphiquement les fonctions f_N et f . On tracera en **Scilab** les courbes pour les valeurs de $N = 32, 64$ et 128 .

D'après le cours pour quelles valeurs de $x \in [-1, 1]$ la suite $(f_N(x))_{N \geq 1}$ ne peut converger vers $f(x)$? On précisera de manière détaillée la raison de la non-convergence de $(f_N(x))_{N \geq 1}$ vers $f(x)$.