

Cours 5 MT09. Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Antoine Zurek

LMAC - UTC

I. Principes généraux et critère de convergence

1. Position du problème
2. Principes généraux
3. Convergence des méthodes itératives

II. Etude de deux méthodes itératives

1. Présentation de la méthode de Jacobi
2. Présentation de la méthode de Gauss-Seidel
3. Convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel
4. Etude d'une autre méthode (méthode de Richardson)

Table of contents

I. Principes généraux et critère de convergence

1. Position du problème
2. Principes généraux
3. Convergence des méthodes itératives

II. Etude de deux méthodes itératives

1. Présentation de la méthode de Jacobi
2. Présentation de la méthode de Gauss-Seidel
3. Convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel
4. Etude d'une autre méthode (méthode de Richardson)

1. Position du problème

Motivation. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ **inversible**. On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$ dans le cas où n est très grand ($> 10^5$) !

Problème. Dans ce cas, une résolution directe du système, **même optimisée** (via LU par exemple) est **trop coûteuse**. Typiquement, de l'ordre de $O(n^3)$ opérations via une méthode LU.

Question. Que faire pour résoudre $Ax = b$ en pratique si n est très grand ?

2. Principes généraux

Idées.

- ▶ On décompose A sous la forme $A = M - N$
- ▶ On choisit M inversible et facile à inverser

alors

$$Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow x = \underbrace{M^{-1}N}_=C x + \underbrace{M^{-1}b}_=d$$

Remarque importante. Ici une solution $\bar{x}$ de $Ax = b$ est interprétée comme un point fixe du problème, i.e., $\bar{x}$ vérifie :

$$\bar{x} = C \bar{x} + d$$

2. Principes généraux

- ▶ On décompose A sous la forme $A = M - N$
- ▶ On choisit M **inversible et facile à inverser**

alors

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad (M - N)x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \underbrace{M^{-1}N}_{=C}x + \underbrace{M^{-1}b}_{=d}$$

Remarque importante. Ici une solution $\bar{x}$ de $Ax = b$ est interprétée comme un **point fixe** du problème, i.e., $\bar{x}$ vérifie :

$$\bar{x} = C \bar{x} + d$$

Vocabulaire. La matrice C est appelée **matrice d'itération**

Problème. Comment calculer **en pratique** $\bar{x}$ via cette formulation ?

2. Principes généraux

Idée des méthodes itératives. Approcher la solution $\bar{x}$ de $\bar{x} = C\bar{x} + d$ par une suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x^{(k+1)} & = Cx^{(k)} + d \end{cases}$$

- ▶ Via ce schéma itératif, on “linéarise” le problème $x = Cx + d$ et on peut facilement calculer $x^{(k+1)}$ en connaissant $x^{(k)}$.
- ▶ Il reste à assurer que ce processus itératif converge bien vers les solutions du problème initial !

Question. Que veut dire convergence dans ce contexte ?

2. Principes généraux

Idée des méthodes itératives. Approcher la solution $\bar{x}$ de $\bar{x} = C\bar{x} + d$ par une suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x^{(k+1)} & = Cx^{(k)} + d \end{cases}$$

Définition

On dit qu'une méthode itérative **converge**, ssi pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme vectorielle et $\bar{x}$ un point fixe de $x = Cx + d$

3. Convergence des méthodes itératives

Soit le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x^{(k+1)} & = Cx^{(k)} + d \end{cases} \quad (1)$$

Proposition 4.1.1.

S'il existe une NMS telle que $|||C||| < 1$, alors la méthode itérative (1) **converge**

Théorème 4.1.2.

La méthode (1) est convergente si et seulement si $\rho(C) < 1$

À retenir. La convergence d'une méthode itérative est liée aux propriétés de la matrice d'itération C

Table of contents

I. Principes généraux et critère de convergence

1. Position du problème
2. Principes généraux
3. Convergence des méthodes itératives

II. Etude de deux méthodes itératives

1. Présentation de la méthode de Jacobi
2. Présentation de la méthode de Gauss-Seidel
3. Convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel
4. Etude d'une autre méthode (méthode de Richardson)

1. Présentation de la méthode de Jacobi

On décompose A sous la forme $A = M - N = D - (E + F)$ où

- ▶ $D = \text{diag}(A)$
- ▶ E matrice strictement tri. inf. issue de $-A$
- ▶ F matrice strictement tri. sup. issue de $-A$

Pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné alors le schéma itératif issu de la méthode de Jacobi et associé à $Ax = b$ s'écrit :

$$x^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}(E + F)}_{=C} x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_{=d}$$

Autrement dit, le schéma s'écrit :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(d_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

2. Présentation de la méthode de Gauss-Seidel

Idem, on décompose A sous la forme $A = D - (E + F)$ où

- ▶ $D = \text{diag}(A)$
- ▶ E matrice strictement tri. inf. issue de $-A$
- ▶ F matrice strictement tri. sup. issue de $-A$

Pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné alors le schéma itératif issu de la méthode de Gauss-Seidel et associé à $Ax = b$ s'écrit :

$$(D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

Autrement dit, le schéma s'écrit :

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D - E)^{-1}F}_{=C} x^{(k)} + \underbrace{(D - E)^{-1}b}_{=d}$$

Remarque. La matrice $D - E$ est triangulaire inf.

3. Convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Définition 4.1.1.

Une matrice A est dite à **diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Proposition 4.1.2.

Si la matrice A est à **diagonale strictement dominante**, alors les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont **convergentes**

Remarque. On peut montrer que si A est **symétrique définie positive** alors la méthode de **Gauss-Seidel** est convergente.

4. Etude d'une autre méthode (méthode de Richardson)

Pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné, on considère le schéma itératif suivant :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - B^{-1}(Ax^{(k)} - b)$$

où B^{-1} simple à calculer.

- ▶ Dans la suite on considère $B = \nu I$ (avec $\nu > 0$)
- ▶ Le schéma est alors de la forme

$$\nu x^{(k+1)} = (\nu I - A)x^{(k)} + b \quad (2)$$

Proposition

Si A est **symétrique définie positive**, alors la méthode itérative (2) est convergente pour tout

$$\nu > \frac{\lambda_{\max}(A)}{2}$$

4. Etude d'une autre méthode (méthode de Richardson)

D'après ce qui précède, si A est **symétrique définie positive** (sdp)

- ▶ $\forall \nu > \lambda_{\max}(A)/2$, alors $\rho(I - \nu^{-1}A) < 1$.
- ▶ On cherche alors un $\nu_{\text{opt}} > \lambda_{\max}(A)/2$ tel que

$$\rho_{\text{opt}} = \rho(I - \nu_{\text{opt}}^{-1}A) \leq \rho(I - \nu^{-1}A) \quad \forall \nu > \lambda_{\max}(A)/2$$

Proposition

Si A est sdp alors le ν_{opt} est donné par

$$\nu_{\text{opt}} = \frac{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)}{2}$$

et dans ce cas

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{\chi_2(A) - 1}{\chi_2(A) + 1}$$

où $\chi_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$