

Chapitre 3 : Déterminants

Véronique Hédou et Antoine Zurek

LMAC - UTC

1. Définition des déterminants

2. Utilisation des déterminants

3. Systèmes linéaires

Table of contents

1. Définition des déterminants

2. Utilisation des déterminants

3. Systèmes linéaires

Définition du déterminant par récurrence

Définition 3.1.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$. On définit l'application déterminant :

$$\begin{aligned}\det : \mathcal{M}_{n,n} &\rightarrow \mathbb{K}, \\ A &\mapsto \det(A),\end{aligned}$$

par récurrence via :

- ▶ si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$,
- ▶ si $n > 1$, on note $A_{|i,j|}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j , on pose alors

$$\begin{aligned}\det(A) = & (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{|1,1|}) + \dots + (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{|1,k|}) \\ & + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(A_{|1,n|}).\end{aligned}$$

Dans la formule précédente on développe par rapport à la
première ligne !

Conséquences immédiates de la définition (1)

Remarques :

- Dans la suite on notera

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$ alors $\det(A)$ est un scalaire !

Conséquences immédiates de la définition (1)

Remarques :

- Dans la suite on notera

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$ alors $\det(A)$ est un **scalaire** !

Formules importantes :

- Si $n = 2$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Si $n = 3$ (**Formule de Sarrus, ne marche que si $n = 3$!**)

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Formule de Sarrus

Exemple. En utilisant la formule de Sarrus, calculer $\det(A)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formule de Sarrus

Exemple. En utilisant la formule de Sarrus, calculer $\det(A)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 1 + 2 \times 5 \times (-2) + 4 \times 0 \times 0 \\ - \dots$$

Formule de Sarrus

Exemple. En utilisant la formule de Sarrus, calculer $\det(A)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 1 + 2 \times 5 \times (-2) + 4 \times 0 \times 0 \\ - (-2) \times (-1) \times 4 - 0 \times 5 \times 1 - 1 \times 0 \times 2$$

Formule de Sarrus

Exemple. En utilisant la formule de Sarrus, calculer $\det(A)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 20 + 0 - 8 - 0 - 0 = -29$$

Formule de Sarrus

Exemple. En utilisant la formule de Sarrus, calculer $\det(A)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À retenir !

La formule de Sarrus ne fonctionne que dans le cas d'une matrice 3×3 !

Conséquences immédiates de la définition (2)

Remarques :

- ▶ Si A est triangulaire inférieure alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$,
- ▶ De manière générale si n est “grand”, le déterminant est long à calculer sauf si la matrice contient beaucoup de 0 dans la première ligne.

⇒ Dans la suite nous allons voir si il est possible de tirer avantage de cette propriété en “créant” des 0 sur la première ligne de la matrice par des opérations sur ses colonnes.

- ▶ **Rappel.** Pour $A \in \mathcal{M}_n$ on notera dans la suite

$$A = (A_1, \dots, A_j, \dots, A_n),$$

où $A_j \in \mathcal{M}_{n,1}$ représente la colonne j de la matrice A .

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (1)

Théorème 3.1.1. (multilinéarité du déterminant)

Le déterminant est une fonction linéaire de chaque colonne :

$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n),$$

$$\det(A_1, \dots, B + C, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, B, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, C, \dots, A_n),$$

avec B et $C \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $\lambda \in K$.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (1)

Théorème 3.1.1. (multilinéarité du déterminant)

Le déterminant est une fonction linéaire de chaque colonne :

$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n),$$

$$\det(A_1, \dots, B + C, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, B, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, C, \dots, A_n),$$

avec B et $C \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $\lambda \in K$.

Proposition 3.1.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
2. Si une colonne de A est nulle alors $\det(A) = 0$.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (2)

Proposition 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- ▶ Si deux colonnes adjacentes sont égales, le déterminant est nul.
- ▶ Si on échange entre elles deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (2)

Proposition 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- ▶ Si deux colonnes adjacentes sont égales, le déterminant est nul.
- ▶ Si on échange entre elles deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe.

Théorème 3.1.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- ▶ Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.
- ▶ Si on échange entre elles deux colonnes, le déterminant change de signe.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (3)

Théorème 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors le déterminant de A ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (3)

Théorème 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors le déterminant de A ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Question : Est-il possible d'obtenir des propriétés similaires par rapport aux lignes de la matrice ?

Théorème 3.1.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors $\det(A) = \det(A^T)$.

Propriétés du déterminant liées aux lignes

Théorème 3.1.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors

- ▶ le déterminant est une fonction multilinéaire de chacune des lignes,
- ▶ Si A a deux lignes égales, le déterminant est nul,
- ▶ Si l'on échange deux lignes de A , le déterminant change de signe,
- ▶ le déterminant de A ne change pas si à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes.

Conséquence. On va pouvoir développer le déterminant par rapport à n'importe quelle colonne ou ligne.

Remarque. le **déterminant d'une matrice triangulaire** sup. ou inf. est égal au **produit de ses termes diagonaux**.

Calcul pratique du déterminant

Définition 3.1.6.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n$. On appelle **cofacteur** de a_{ij} :

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{|i,j|}) \in \mathbb{R}.$$

Conséquences. développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = a_{i1} \text{cof}(a_{i1}) + \dots + a_{in} \text{cof}(a_{in}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \text{cof}(a_{ik}),$$

développement par rapport à la colonne j

$$\det(A) = a_{1j} \text{cof}(a_{1j}) + \dots + a_{nj} \text{cof}(a_{nj}) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \text{cof}(a_{kj}).$$

Conclusion : On cherche à construire une matrice contenant “beaucoup” de zéros sur une ligne **ou** une colonne et on développe.

Table of contents

1. Définition des déterminants

2. Utilisation des déterminants

3. Systèmes linéaires

Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1.2.

On considère E un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. Soit $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in E$. On note $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{M}_{n,1}$ les matrices colonnes contenant les composantes des vecteurs $\vec{x}_i$. Enfin on note $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{M}_n$. Alors par définition :

$$\det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \det(X) = \det(X_1, \dots, X_n).$$

Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1.2.

On considère E un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. Soit $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in E$. On note $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{M}_{n,1}$ les matrices colonnes contenant les composantes des vecteurs $\vec{x}_i$. Enfin on note $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{M}_n$. Alors par définition :

$$\det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \det(X) = \det(X_1, \dots, X_n).$$

Théorème 3.2.2.

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. On considère $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in E$. Alors on a l'équivalence :

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \neq 0.$$

Conséquence : $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ famille liée.

Déterminant et inversibilité

Théorème 3.2.1,3,4 et Proposition 3.2.2.

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n$ alors

1. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$,
2. A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$,
3. Si A est inversible $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
4. A est inversible $\Leftrightarrow$ il existe $C \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $AC = I_n$
ou $CA = I_n$, dans ce cas $C = A^{-1}$.

Attention : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$!

Déterminant et inversibilité

Théorème 3.2.1,3,4 et Proposition 3.2.2.

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n$ alors

1. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$,
2. A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$,
3. Si A est inversible $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
4. A est inversible $\Leftrightarrow$ il existe $C \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $AC = I_n$
ou $CA = I_n$, dans ce cas $C = A^{-1}$.

Attention : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$!

Caractérisation de A inversible, $A \in \mathcal{M}_n$

Si $A \in \mathcal{M}_n$, on a

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n \\ &\Leftrightarrow \ker(A) = \{0\} \end{aligned}$$

Déterminant et inversibilité

Théorème 3.2.1,3,4 et Proposition 3.2.2.

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n$ alors

1. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$,
2. A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$,
3. Si A est inversible $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
4. A est inversible $\Leftrightarrow$ il existe $C \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $AC = I_n$
ou $CA = I_n$, dans ce cas $C = A^{-1}$.

Attention : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$!

Proposition 3.2.3.

Soient A et $A' \in \mathcal{M}_n$ deux matrices semblables alors

$$\det(A) = \det(A').$$

Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E K e.v. de dimension finie. On appelle déterminant de u le **déterminant de toute matrice** représentant u dans une base arbitraire de E

Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E K e.v. de dimension finie. On appelle déterminant de u le **déterminant de toute matrice** représentant u dans une base arbitraire de E

Exemple. Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$. On a vu au chapitre 2 que A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

représente u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. De plus A' donnée par

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

représente u dans la base $((1, 1), (-1, 1))$ de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\det(A) = \det(A') = -1 = \det(u)$$

Rang d'une matrice (1)

Définition 3.2.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. On appelle matrice extraite de A une matrice constituée “d'intersections” de lignes et colonnes de A .

Théorème 3.2.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice extraite $\hat{A} \in \mathcal{M}_{r,r}$ de A **invertible**.

Rang d'une matrice (2)

Proposition 3.2.4.

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension n et soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ p vecteurs de E avec $p \leq n$. On note $X = (X_1, \dots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}$ où $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}$ est une matrice colonne contenant les composantes du vecteur $\vec{x}_i$. **Les propriétés suivantes sont équivalentes :**

- ▶ La famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est libre.
- ▶ $\text{rang}(X) = p$ (avec $X = (X_1, \dots, X_p)$).
- ▶ Il existe une matrice extraite de X à p lignes et p colonnes inversible.

Table of contents

1. Définition des déterminants

2. Utilisation des déterminants

3. Systèmes linéaires

Notations

Jusqu'à présent, X désignait le vecteur formé des composantes de $\vec{x}$
→ à partir de maintenant, on le notera x , autrement dit, x désigne indistinctement $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ ou $\vec{x} \in K^n$.

Exemple : On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= b_1, \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 + 11x_4 &= b_2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= b_3. \end{cases}$$

On peut réécrire ce système sous la forme matricielle $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 11 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Existence de solution(s) pour $Ax = b$

On cherche à résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ sont connus et $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur **inconnu du système**.

Existence de solution(s) pour $Ax = b$

On cherche à résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ sont connus et $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur **inconnu du système**.

- Existence d'une solution pour un vecteur b donné :

Il existe $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ vérifiant $Ax = b \Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$.

- Existence d'une solution pour un tout vecteur $b \in \mathcal{M}_{n,1}$:

$\forall b \in \mathcal{M}_{n,1} \quad \exists x \in \mathcal{M}_{p,1}$ vérifiant $Ax = b$

$\Leftrightarrow \text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$.

Unicité de la solution (si elle existe)

On suppose l'existence d'au moins un $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ solution de

$$Ax = b,$$

i.e. $b \in \text{Im}(A)$.

- Unicité de la solution (si elle existe) :

$Ax = b$ admet une unique solution $\Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}$.

- Infinité de solutions :

$Ax = b$ admet une infinité de solutions $\Leftrightarrow \ker(A) \neq \{0\}$.

Résumé

À retenir !

Le système $Ax = b$ avec $x \in \mathcal{M}_{p,1}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ admet

- ▶ soit une unique solution si $b \in \text{Im}(A)$ et $\ker(A) = \{0\}$,
- ▶ soit une infinité de solutions si $b \in \text{Im}(A)$ et $\ker(A) \neq \{0\}$,
- ▶ soit aucune solution si $b \notin \text{Im}(A)$.

Résumé

À retenir !

Le système $Ax = b$ avec $x \in \mathcal{M}_{p,1}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ admet

- ▶ soit une unique solution si $b \in \text{Im}(A)$ et $\ker(A) = \{0\}$,
- ▶ soit une infinité de solutions si $b \in \text{Im}(A)$ et $\ker(A) \neq \{0\}$,
- ▶ soit aucune solution si $b \notin \text{Im}(A)$.

Conclusions : Il est toujours utile d'étudier le noyau de A !

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

2 cas :

- ▶ Si $\ker(A) = \{0\}$ alors le système peut admettre une unique solution si $b \in \text{Im}(A)$ ou pas de solution.
- ▶ Si $\ker(A) \neq \{0\}$ alors le système admet une infinité de solutions si $b \in \text{Im}(A)$ ou pas de solution.

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

2 cas :

- ▶ Si $\ker(A) = \{0\}$ alors le système peut admettre une unique solution si $b \in \text{Im}(A)$ ou pas de solution.
- ▶ Si $\ker(A) \neq \{0\}$ alors le système admet une infinité de solutions si $b \in \text{Im}(A)$ ou pas de solution.

Etape 2. On cherche une solution particulière à l'équation inhomogène $Ax = b$

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

Remarque. Si $\ker(A) \neq \{0\}$ et $b \in \text{Im}(A)$ alors la solution est de la forme :

solution eq homogène + solution particulière.

Cas particulier $A \in \mathcal{M}_n$

Le système $Ax = b$ admet une **solution unique** $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. En effet $\det(A) \neq 0$ équivaut à A inversible. Dans ce cas la solution du système est donnée par $x = A^{-1}b$.

Si $\det(A) = 0$:

- ▶ Si $b \notin \text{Im}(A)$ il n'y a **pas de solution**,
- ▶ Si $b \in \text{Im}(A)$ alors $Ax = b$ admet une **infinité de solutions**.

Calcul de la solution :

- ▶ On utilise la méthode du **pivot de Gauss** (calcul pratique).
- ▶ si $\det(A) \neq 0$ on peut utiliser la **formule de Cramer**

$$x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}.$$

Cette formule théorique **n'est pas (ou peu)** utilisée en pratique !

Calcul de l'inverse d'une matrice (1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on suppose que A est inversible (i.e. $\det(A) \neq 0$).
Comment calculer A^{-1} ?

- À la main : en utilisant la **méthode du pivot de Gauss**, on cherche à résoudre le système

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

- Numériquement : on cherche à résoudre n systèmes linéaires

$$AB = I \Leftrightarrow AB_j = I_j \quad j = 1, \dots, n.$$

- Théoriquement : on utilise la formule de Cramer pour résoudre

$$AB_j = I_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Calcul de l'inverse d'une matrice (2)

Définition 3.3.1.

On appelle **co-matrice** de $A \in \mathcal{M}_n$, notée $\text{co}(A)$, la matrice des cofacteurs de A

$$\text{co}(A) = (\text{cof}(a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

avec

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{|i,j|}) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Théorème 3.3.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ **inversible**, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{cof}(A))^{\top}.$$