

MT09 A26 - Feuille de TD n° 7
Exercices préparatoires
au chapitre 3 "problèmes aux moindres carrés"

Exercice 1 : projection orthogonale sur une droite

Soit $\mathbf{a}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$. On cherche $\alpha^* \in \mathbb{R}$ qui réalise le minimum de

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\alpha \mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2.$$

On définit la fonction $\varphi(\alpha) = \frac{1}{2} \|\alpha \mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2$.

1. Calculer $\varphi'(\alpha)$ et faire une étude de fonction pour φ .
2. Quelle est la valeur de α^* ?
3. On note $\mathbf{y}^* = \alpha^* \mathbf{a}$. Quelle interprétation peut-on donner à $\mathbf{y}^*$?

Exercice 2 : projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ donné. On s'intéresse au problème de minimisation

$$\min_{\mathbf{z} \in F} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2. \quad (1)$$

On notera $\mathbf{z}^* \in F$ le vecteur qui réalise le minimum de (1) :

$$\mathbf{z}^* = \arg \min_{\mathbf{z} \in F} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2.$$

1. Montrer que si $\mathbf{z}^*$ est solution de (1), alors $\mathbf{z}^*$ est la projection orthogonale de $\mathbf{y}$ sur F , caractérisée par :

$$\begin{cases} \mathbf{z}^* \in F, \\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z}^* \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in F, \end{cases}$$

2. Inversement, montrer que si $\mathbf{z}^*$ est la projection orthogonale de $\mathbf{y}$ sur F , alors $\mathbf{z}^*$ réalise le minimum de (1).
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ avec $n \leq m$. La matrice A est donc une matrice rectangulaire et $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$, $\dim(\text{Im}(A)) \leq n$. On s'intéresse au problème de minimisation

$$\min_{\mathbf{z} \in \text{Im}(A)} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2. \quad (2)$$

Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\langle A\mathbf{u} - \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \text{Im}(A).$$

4. Montrer que $\mathbf{u}$ est solution du système linéaire

$$A^T A \mathbf{u} = A^T \mathbf{y}.$$

Exercice 3 : reformulation d'un système linéaire ayant une matrice sdp

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. On cherche $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ solution du système linéaire

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}. \quad (3)$$

Plutôt que résoudre (3), on décide de résoudre le système équivalent

$$A^T A \mathbf{u} = A^T \mathbf{b}. \quad (4)$$

1. Montrer que la matrice $A^T A$ est symétrique définie positive. Quelle méthode directe ou méthode itérative pourrait être utilisée pour résoudre (4) ?

2. Montrer que

$$\text{Cond}_2(A^T A) = [\text{Cond}_2(A)]^2.$$

Exercice 4 : factorisation QR d'une matrice rectangulaire verticale

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $m \geq n$. On suppose que A est de rang maximal. Dans ce qui suit, on note $A_j \in \mathbb{R}^m$ la j -ème colonne de A .

1. Montrer qu'il existe un vecteur $\mathbf{q}_1$, $\|\mathbf{q}_1\|_2 = 1$ et un coefficient α_{11} tel que

$$A_1 = \alpha_{11} \mathbf{q}_1.$$

2. Montrer qu'il existe un vecteur $\mathbf{q}_2$, avec $\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 \rangle = 0$ et $\|\mathbf{q}_2\|_2 = 1$, et deux coefficients α_{12} et α_{22} tels que

$$A_2 = \alpha_{12} \mathbf{q}_1 + \alpha_{22} \mathbf{q}_2.$$

3. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $Q^T Q = I_n$ et une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice triangulaire supérieure, telles que

$$\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{Q}_{m \times n} \underbrace{R}_{n \times n}.$$

On a effectué ce que l'on appelle la factorisation QR de A .

4. Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Montrer que la résolution du système linéaire

$$A^T A \mathbf{u} = A^T \mathbf{y}$$

est mathématiquement équivalente à la résolution du système triangulaire

$$R\mathbf{u} = Q^T \mathbf{y}.$$

5. Montrer que

$$\text{Cond}_2(R) = \sqrt{\text{Cond}_2(A^T A)}.$$