

MT09 A26 - Feuille de TD n° 8

Approximation aux moindres carrés

Exercice 1 : droites de régression

Soit $m \geq 2$ et (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ un ensemble de données dans $\mathbb{R}^2$.

1. On cherche la fonction constante $f(x) = c$ qui minimise les écarts aux carrés

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i))^2.$$

Écrire la fonction $\varphi(c)$ à minimiser sous la forme $\alpha c^2 + \beta c + \delta$. Que vaut le c qui réalise le minimum ?

2. On cherche la meilleure approximation affine $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimise les écarts aux carrés :

$$\min_{(a,b)} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i))^2.$$

Montrer que le problème est équivalent au problème sous forme matricielle

$$\min_{\mathbf{u}=(a,b)^T} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{y}\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice A et le vecteur $\mathbf{y}$.

3. Montrer que a et b sont solutions du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}.$$

4. Ce système est-il toujours inversible ? *Indication* : calculez le déterminant de la matrice du système 2×2 . En notant $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$, développez

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x} + \bar{x})^2 - \bar{x}^2.$$

Que représente cette grandeur ?

Exercice 2 : régression polynomiale

On considère un nuage de points $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, m\}$. On suppose $m \geq 4$. On cherche alors le polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

de degré inférieur ou égal à trois qui minimise les écarts aux carrés

$$\min_{(a_0, a_1, a_2, a_3)} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (p(x_i) - y_i)^2$$

1. Montrez que ce problème peut-être écrit sous la forme

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{y}\|_2^2$$

où l'on précisera le vecteur $\mathbf{y}$ et la matrice $\mathbf{A}$.

2. Quel système linéaire satisfait le minimum (noté $\mathbf{u}^*$) ? La matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est-elle inversible ?
3. Que se passe-t-il si $m = 4$? Justifier.

Exercice 3 : régression affine par morceaux

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$\varphi(x) = \max(0, 1 - |x|).$$

Tracez la fonction φ sur l'intervalle $[-3, 3]$. On appelle φ la fonction 'chapeau'.

2. Pour des réels u_j , $j = -n, \dots, 0, \dots, n$, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{j=-n}^n u_j \varphi(x - j).$$

Que vaut f restreinte à l'intervalle $[0, 1]$? Quelle est la nature de la fonction f ? Tracer la fonction

$$f(x) = 3\varphi(x+1) - \varphi(x) + \varphi(x-1).$$

3. On considère maintenant $n = 1$ (trois coefficients u_{-1} , u_0 et u_1). On cherche à minimiser les écarts aux carrés

$$\min_{(u_{-1}, u_0, u_1)} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i))^2.$$

Réécrire le problème sous la forme

$$\min_{\mathbf{u} = (u_{-1}, u_0, u_1)^T} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{y}\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{y}$. Écrire les équations normales.

Exercice 4 : approximation d'intégrales

Étant donné des points $\{x_j \in [0, 1], j = 1, \dots, n\}$ et f fonction continue quelconque sur $[0, 1]$, on cherche une formule d'approximation d'intégrale de la forme

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \omega_j f(x_j)$$

avec $\omega_1, \dots, \omega_n$ réels, à calibrer. Connaissant la valeur exacte de $\int_0^1 f_i(x) dx$ pour une famille de m fonctions continues f_i ($m \geq n$), formulez le problème de moindres carrés permettant déterminer les 'meilleurs' coefficients $(\omega_j)_{j=1, \dots, n}$. Résoudre le problème.