

MT09 A26 - Feuille de TD n° 8 bis
Approximation aux moindres carrés (suite et fin)

Exercice 1 : régression polynomiale et régularisation de Tykhonov

Soit $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, m\}$ un nuage de points dans $\mathbb{R}^2$. Soit n un entier, $n \leq m - 1$ et un paramètre $\mu \geq 0$. On considère ici un polynôme de régression de degré inférieur ou égal à n :

$$f(x) = u_0 + u_1x + \dots + u_nx^n.$$

On note $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. On cherche à minimiser la fonction de perte

$$\mathcal{L}_\mu(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(f(x_i) - y_i \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left((u_0 - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n u_i^2 \right)$$

où $\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$.

1. Réécrire $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{u})$ sous la forme

$$\mathcal{L}_\mu(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{1}{2} \mu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice $\mathbf{A}$ et sa taille, ainsi que les vecteurs $\mathbf{y}$ et $\mathbf{u}^0$ (et leur taille).

2. Montrer que les solutions $\mathbf{u}_\mu$ réalisant le minimum de

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{L}_\mu(\mathbf{u})$$

sont solutions du système linéaire

$$(A^T A + \mu I_{n+1}) \mathbf{u}_\mu = A^T \mathbf{y} + \mu \mathbf{u}^0.$$

3. Pour $\mu > 0$, que peut-on dire de la matrice $A^T A + \mu I_{n+1}$?
4. Que vaut $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathbf{u}_\mu$? Quelle est la fonction de régression correspondante ?
5. Que vaut

$$\text{Cond}_{\|\cdot\|_2}(A^T A + \mu I_{n+1}) ?$$

(exprimer le résultat en fonction des valeurs propres de $A^T A$). Que vaut

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \text{Cond}_{\|\cdot\|_2}(A^T A + \mu I_{n+1}) ?$$

6. Que préconisez-vous comme choix de μ ?

Exercice 2 : Approche proximale

Une méthode proximale est une approche itérative qui fait intervenir un "prior" dans le terme de régularisation de Tykhonov. Étant donné la solution $\mathbf{u}_k$ à l'itération (k) précédente, on cherche un nouveau vecteur $\mathbf{u}_{k+1}$ solution du problème de moindres carrés régularisés :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{1}{2} \mu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_2^2$$

Pour amorcer la suite, on peut partir de $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$.

1. Quelles sont les solutions normales associées à ce problème de moindres carrés ?
2. Si la suite $(\mathbf{u}_k)_k$ converge vers un $\mathbf{u}^*$, quel système linéaire satisfait $\mathbf{u}^*$?
3. Étudier la convergence de la suite $(\mathbf{u}_k)$ (discuter éventuellement du choix de μ).

Exercice 3 : Moindres carrés pondérés

Soit $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, m\}$ un nuage de points dans $\mathbb{R}^2$. Soit n un entier, $n \leq m - 1$. On considère ici un polynôme de régression de degré inférieur ou égal à n :

$$f(x) = u_0 + u_1x + \dots + u_nx^n.$$

On note $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. On considère le problème ux moindres carrés à poids

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \omega_i \left(f(x_i) - y_i \right)^2$$

où les poids $\omega_i, i = 1, \dots, m$ sont strictement positifs.

1. Réécrire le problème aux moindres carrés sous la forme

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{2} \|W(\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{y})\|_2^2$$

où l'on précisera la matrice A , le vecteur $\mathbf{y}$ et la matrice W (justifier précisément).

2. Quelle sont les équations normales ?