Cours MT09. Intégration numérique

Antoine Zurek

LMAC – UTC

I. Motivations et principe
1. Pourquoi intégrer numériquement ?
2. Formules de quadrature

II. Méthodes fondées sur des polynômes d'interpolation
1. Principe de construction
2. Intervalle de référence
3. Erreur et degré d'exactitude

III. Formules de Newton–Cotes
1. Nœuds équidistants
2. Formule des trapèzes ($n = 1$)
3. Formule de Simpson ($n = 2$)
4. Formule de Simpson 3/8 ($n = 3$)
5. Intégration numérique composée

IV. Quadrature de Gauss–Legendre
1. Idée générale
2. Polynômes de Legendre
3. Construction de la formule
4. Exemple à deux points

Table of contents

I. Motivations et principe

1. Pourquoi intégrer numériquement ?
2. Formules de quadrature

II. Méthodes fondées sur des polynômes d'interpolation

1. Principe de construction
2. Intervalle de référence
3. Erreur et degré d'exactitude

III. Formules de Newton–Cotes

1. Nœuds équidistants
2. Formule des trapèzes ($n = 1$)
3. Formule de Simpson ($n = 2$)
4. Formule de Simpson 3/8 ($n = 3$)
5. Intégration numérique composée

IV. Quadrature de Gauss–Legendre

1. Idée générale
2. Polynômes de Legendre
3. Construction de la formule
4. Exemple à deux points

1. Pourquoi intégrer numériquement ?

On cherche à approcher

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Deux situations classiques.

- On ne connaît f qu'en un nombre fini de points $t_0, \ldots, t_n$.
- On sait calculer $f(t)$ pour tout t, mais on ne connaît pas de primitive explicite, ou son calcul est trop complexe.

1. Pourquoi intégrer numériquement ?

On cherche à approcher

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Deux situations classiques.

- On ne connaît f qu'en un nombre fini de points $t_0, \ldots, t_n$.
- On sait calculer $f(t)$ pour tout t, mais on ne connaît pas de primitive explicite, ou son calcul est trop complexe.

Idée. Remplacer le calcul de l'intégrale par une combinaison linéaire d'un nombre fini de valeurs de la fonction :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i).$$

2. Formules de quadrature

Définition.

Une formule de quadrature est une approximation de la forme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i) = J(f).$$

Les points t_i sont les nœuds et les nombres w_i les poids (ou coefficients) de la formule.

Remarques.

- Les nœuds peuvent être imposés ou choisis.
- Les poids et les nœuds ne dépendent pas de la fonction f.
- On cherche à construire des formules exactes sur des classes de fonctions aussi larges que possible.

2. Formules de quadrature

Définition.

Une formule de quadrature est une approximation de la forme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i) = J(f).$$

Les points t_i sont les nœuds et les nombres w_i les poids (ou coefficients) de la formule.

Remarques.

- Les nœuds peuvent être imposés ou choisis.
- Les poids et les nœuds ne dépendent pas de la fonction f.
- On cherche à construire des formules exactes sur des classes de fonctions aussi larges que possible.

Objectif. Comprendre comment choisir les nœuds et les poids, puis contrôler l'erreur commise.

Table of contents

I. Motivations et principe
1. Pourquoi intégrer numériquement ?
2. Formules de quadrature

II. Méthodes fondées sur des polynômes d'interpolation
1. Principe de construction
2. Intervalle de référence
3. Erreur et degré d'exactitude

III. Formules de Newton–Cotes
1. Nœuds équidistants
2. Formule des trapèzes ($n = 1$)
3. Formule de Simpson ($n = 2$)
4. Formule de Simpson 3/8 ($n = 3$)
5. Intégration numérique composée

IV. Quadrature de Gauss–Legendre
1. Idée générale
2. Polynômes de Legendre
3. Construction de la formule
4. Exemple à deux points

1. Principe de construction

On se donne $n+1$ nœuds distincts $t_0, \ldots, t_n$ et on note p_f le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui interpole f en ces points.

$$p_f(t_i) = f(t_i), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Dans la base de Lagrange,

$$p_f(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) L_i(t).$$

1. Principe de construction

On se donne $n+1$ nœuds distincts $t_0, \ldots, t_n$ et on note p_f le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui interpole f en ces points.

$$p_f(t_i) = f(t_i), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Dans la base de Lagrange,

$$p_f(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) L_i(t).$$

On approche alors l'intégrale de f par celle de son interpolant :

$$J(f) = \int_a^b p_f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b L_i(t)\,\mathrm{d}t \right) f(t_i).$$

1. Principe de construction

On se donne $n+1$ nœuds distincts $t_0, \ldots, t_n$ et on note p_f le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui interpole f en ces points.

$$p_f(t_i) = f(t_i), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Dans la base de Lagrange,

$$p_f(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) L_i(t).$$

On approche alors l'intégrale de f par celle de son interpolant :

$$J(f) = \int_a^b p_f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b L_i(t)\,\mathrm{d}t \right) f(t_i).$$

Formule de quadrature associée à l'interpolation

$$J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i), \quad w_i = \int_a^b L_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Principe de construction

Une caractérisation équivalente des poids.

Les poids sont aussi caractérisés par l'exactitude de la formule sur $\mathbb{P}_n$:

$$\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} w_i p(t_i), \qquad \forall p \in \mathbb{P}_n.$$

Il suffit de vérifier cette égalité pour les monômes $1, t, \ldots, t^n$. On obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \cdots & t_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b 1\,\mathrm{d}t \\ \int_a^b t\,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b t^n\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

1. Principe de construction

Une caractérisation équivalente des poids.

Les poids sont aussi caractérisés par l'exactitude de la formule sur $\mathbb{P}_n$:

$$\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} w_i p(t_i), \qquad \forall p \in \mathbb{P}_n.$$

Il suffit de vérifier cette égalité pour les monômes $1, t, \ldots, t^n$. On obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \cdots & t_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b 1\,\mathrm{d}t \\ \int_a^b t\,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b t^n\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Remarque. La matrice est une matrice de Vandermonde. Comme les nœuds sont deux à deux distincts, elle est inversible : les poids existent et sont uniques.

2. Intervalle de référence

Les poids dépendent de l'intervalle $[a, b]$. Pour construire des tables de quadrature indépendantes de cet intervalle, on se ramène à $[-1, 1]$.
On effectue le changement de variable affine

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u, \qquad \mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u\right)\mathrm{d}u.$$

2. Intervalle de référence

Les poids dépendent de l'intervalle $[a, b]$. Pour construire des tables de quadrature indépendantes de cet intervalle, on se ramène à $[-1, 1]$.
On effectue le changement de variable affine

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u, \qquad \mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u\right)\mathrm{d}u.$$

Conséquence. Il suffit de construire les formules sur l'intervalle de référence $[-1, 1]$. On les transporte ensuite sur tout intervalle $[a, b]$.

3.1. Erreur de quadrature

On note

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i).$$

L'erreur de quadrature est

$$E(f) = I(f) - J(f).$$

Dans le cas d'une formule obtenue par interpolation,

$$E(f) = \int_a^b \big(f(t) - p_f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Si $f \in C^{n+1}$, il existe un point $\xi(t) \in \mathrm{Int}(t, t_0, \ldots, t_n)$ tel que

$$f(t) - p_f(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - t_i).$$

3.1. Erreur de quadrature

On note

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i).$$

L'erreur de quadrature est

$$E(f) = I(f) - J(f).$$

Dans le cas d'une formule obtenue par interpolation,

$$E(f) = \int_a^b \big(f(t) - p_f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Si $f \in C^{n+1}$, il existe un point $\xi(t) \in \mathrm{Int}(t, t_0, \ldots, t_n)$ tel que

$$f(t) - p_f(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (t - t_i).$$

En posant $M = \max_{\mathrm{Int}(a,b,t_0,\ldots,t_n)} |f^{(n+1)}|$, on obtient

$$|E(f)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^{n} (t - t_i) \right| \mathrm{d}t.$$

3.2. Degré d'exactitude

Définition 6.2.1.

Le degré d'exactitude d'une formule de quadrature est le plus grand entier n tel que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n.

À retenir.

- Une formule construite par interpolation en $n+1$ nœuds est exacte sur $\mathbb{P}_n$.
- Elle peut être exacte sur un espace polynomial plus grand : c'est notamment le cas de certaines formules de Newton–Cotes et des formules de Gauss–Legendre.

3.2. Degré d'exactitude

Définition 6.2.1.

Le degré d'exactitude d'une formule de quadrature est le plus grand entier n tel que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n.

À retenir.

- Une formule construite par interpolation en $n+1$ nœuds est exacte sur $\mathbb{P}_n$.
- Elle peut être exacte sur un espace polynomial plus grand : c'est notamment le cas de certaines formules de Newton–Cotes et des formules de Gauss–Legendre.

Question. Peut-on choisir les nœuds pour augmenter le degré d'exactitude, sans augmenter leur nombre ?

Table of contents

I. Motivations et principe
1. Pourquoi intégrer numériquement ?
2. Formules de quadrature

II. Méthodes fondées sur des polynômes d'interpolation
1. Principe de construction
2. Intervalle de référence
3. Erreur et degré d'exactitude

III. Formules de Newton–Cotes
1. Nœuds équidistants
2. Formule des trapèzes ($n = 1$)
3. Formule de Simpson ($n = 2$)
4. Formule de Simpson 3/8 ($n = 3$)
5. Intégration numérique composée

IV. Quadrature de Gauss–Legendre
1. Idée générale
2. Polynômes de Legendre
3. Construction de la formule
4. Exemple à deux points

1. Nœuds équidistants

Les formules de Newton–Cotes utilisent des nœuds équidistants, avec $t_0 = a$, $t_n = b$ et

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad t_i = a + ih.$$

On intègre le polynôme interpolateur construit aux points $t_0, \ldots, t_n$.

Quelques formules classiques.

- $n = 1$: formule des trapèzes.
- $n = 2$: formule de Simpson.
- $n = 3$: formule de Simpson 3/8.

1. Nœuds équidistants

Les formules de Newton–Cotes utilisent des nœuds équidistants, avec $t_0 = a$, $t_n = b$ et

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad t_i = a + ih.$$

On intègre le polynôme interpolateur construit aux points $t_0, \ldots, t_n$.

Quelques formules classiques.

- $n = 1$: formule des trapèzes.
- $n = 2$: formule de Simpson.
- $n = 3$: formule de Simpson 3/8.

Dans la pratique, on utilise rarement des degrés d'interpolation élevés : les polynômes d'interpolation peuvent présenter de fortes oscillations (phénomène de Runge). On préfère souvent appliquer localement des formules de faible degré (intégration numérique composée).

2. Formule des trapèzes ($n = 1$)

On utilise les deux nœuds $t_0 = a$ et $t_1 = b$. On obtient la formule suivante :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)}$$

2. Formule des trapèzes ($n = 1$)

On utilise les deux nœuds $t_0 = a$ et $t_1 = b$. On obtient la formule suivante :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)}$$

Si $f \in C^2([a,b])$, il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta).$$

La formule des trapèzes est d'ordre 1.

3. Formule de Simpson ($n = 2$)

On utilise trois nœuds équidistants :

$$t_0 = a, \qquad t_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad t_2 = b, \qquad h = \frac{b-a}{2}.$$

La formule de Simpson s'écrit

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \frac{h}{3}\big(f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2)\big).}$$

3. Formule de Simpson ($n = 2$)

On utilise trois nœuds équidistants :

$$t_0 = a, \qquad t_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad t_2 = b, \qquad h = \frac{b-a}{2}.$$

La formule de Simpson s'écrit

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \frac{h}{3}\big(f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2)\big).}$$

Si $f \in C^4([a,b])$, il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta).$$

À retenir. La formule de Simpson est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, bien qu'elle soit construite à partir d'un interpolant de degré 2.

4. Formule de Simpson 3/8 ($n = 3$)

On utilise quatre nœuds équidistants :

$$t_i = a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{3}, \qquad i = 0, \ldots, 3.$$

La formule est

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \frac{3h}{8}\big(f(t_0) + 3f(t_1) + 3f(t_2) + f(t_3)\big).}$$

4. Formule de Simpson 3/8 ($n = 3$)

On utilise quatre nœuds équidistants :

$$t_i = a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{3}, \qquad i = 0, \ldots, 3.$$

La formule est

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \frac{3h}{8}\big(f(t_0) + 3f(t_1) + 3f(t_2) + f(t_3)\big).}$$

Si $f \in C^4([a,b])$, il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$E(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\eta).$$

Remarque. Pour les formules de Newton–Cotes :

- si n est pair, le degré d'exactitude est $n+1$;
- si n est impair, le degré d'exactitude est n.

5. Intégration numérique composée

Pour intégrer sur un grand intervalle, on découpe $[a, b]$ en N sous-intervalles de même longueur :

$$t_i = a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{N}.$$

On applique une formule de quadrature sur chacun des sous-intervalles, puis on additionne les résultats.
Exemple : formule des trapèzes composée.

$$\boxed{J(f) = h\left(\frac{f(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i) + \frac{f(t_N)}{2}\right).}$$

5. Intégration numérique composée

Pour intégrer sur un grand intervalle, on découpe $[a, b]$ en N sous-intervalles de même longueur :

$$t_i = a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{N}.$$

On applique une formule de quadrature sur chacun des sous-intervalles, puis on additionne les résultats.
Exemple : formule des trapèzes composée.

$$\boxed{J(f) = h\left(\frac{f(t_0)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i) + \frac{f(t_N)}{2}\right).}$$

Si $f \in C^2([a, b])$, l'erreur globale s'écrit

$$E(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \qquad \eta \in [a, b].$$

Ainsi, à régularité fixée, l'erreur est en $O(h^2)$.

Table of contents

I. Motivations et principe
1. Pourquoi intégrer numériquement ?
2. Formules de quadrature

II. Méthodes fondées sur des polynômes d'interpolation
1. Principe de construction
2. Intervalle de référence
3. Erreur et degré d'exactitude

III. Formules de Newton–Cotes
1. Nœuds équidistants
2. Formule des trapèzes ($n = 1$)
3. Formule de Simpson ($n = 2$)
4. Formule de Simpson 3/8 ($n = 3$)
5. Intégration numérique composée

IV. Quadrature de Gauss–Legendre
1. Idée générale
2. Polynômes de Legendre
3. Construction de la formule
4. Exemple à deux points

1. Idée générale

Les formules de Newton–Cotes imposent des nœuds équidistants.
Lorsque l'on peut évaluer f en tout point, on peut aussi choisir les nœuds.
Avec n points, on dispose de

$$n \text{ poids} \quad + \quad n \text{ nœuds},$$

soit $2n$ paramètres.

Objectif. Construire une formule à n points qui soit exacte pour les polynômes de degré aussi élevé que possible.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i).$$

1. Idée générale

Les formules de Newton–Cotes imposent des nœuds équidistants.
Lorsque l'on peut évaluer f en tout point, on peut aussi choisir les nœuds.
Avec n points, on dispose de

$$n \text{ poids} \quad + \quad n \text{ nœuds},$$

soit $2n$ paramètres.

Objectif. Construire une formule à n points qui soit exacte pour les polynômes de degré aussi élevé que possible.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i).$$

La quadrature de Gauss–Legendre atteint le degré d'exactitude $2n-1$, avec n points.

2.1. Définition des polynômes de Legendre

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$\boxed{g_k(t) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(t^2-1)^k.}$$

Les premiers polynômes sont

$$g_0(t) = 1, \qquad g_1(t) = 2t, \qquad g_2(t) = 12t^2 - 4,$$

$$g_3(t) = 120t^3 - 72t.$$

Propriétés immédiates.

- g_k est un polynôme de degré k.
- Sa dérivée d'ordre k est une constante non nulle.
- La famille $(g_0, \ldots, g_n)$ forme une base de $\mathbb{P}_n$.

2.2. Orthogonalité des polynômes de Legendre

Théorème 6.3.3.

Les polynômes de Legendre sont orthogonaux sur $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} g_i(t) g_k(t) \, \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{si } i \neq k.$$

Idée de la démonstration. Supposons que $k > i$.

- On écrit $g_k(t) = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(t^2 - 1)^k$.
- On effectue des intégrations par parties successives.
- Les termes de bord sont nuls car $(t^2 - 1)^k$ possède -1 et 1 comme racines de multiplicité k.
- Après suffisamment d'intégrations par parties, on dérive un polynôme de degré strictement inférieur à l'ordre de dérivation et donc le résultat est nul.

2.2. Orthogonalité des polynômes de Legendre

Théorème 6.3.3.

Les polynômes de Legendre sont orthogonaux sur $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} g_i(t) g_k(t) \, \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{si } i \neq k.$$

Idée de la démonstration. Supposons que $k > i$.

- On écrit $g_k(t) = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(t^2 - 1)^k$.
- On effectue des intégrations par parties successives.
- Les termes de bord sont nuls car $(t^2 - 1)^k$ possède -1 et 1 comme racines de multiplicité k.
- Après suffisamment d'intégrations par parties, on dérive un polynôme de degré strictement inférieur à l'ordre de dérivation et donc le résultat est nul.

Conséquence. g_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

2.3. Racines des polynômes de Legendre

Théorème 6.3.5.

Pour tout $n \geq 1$, le polynôme g_n possède exactement n racines distinctes et simples dans $]-1, 1[$.

Pourquoi ce résultat est-il important ?

Les racines de g_n fournissent précisément les nœuds de la formule de Gauss–Legendre à n points !

3. Construction de la formule

On approche

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

par la formule de quadrature suivante :

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i),$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont les n racines de g_n dans $]-1, 1[$. On cherche ensuite les poids $w_1, \ldots, w_n$ en imposant l'exactitude sur $\mathbb{P}_{n-1}$:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i g_k(\xi_i) = \int_{-1}^{1} g_k(t)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

3. Degré d'exactitude : théorème de Gauss

Théorème6.3.6.

Soit $n \geq 1$, le système linéaire

$$\begin{pmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) & \dots & g_0(\xi_n) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) & \dots & g_1(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1}(\xi_1) & g_{n-1}(\xi_2) & \dots & g_{n-1}(\xi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

admet une unique solution. Si les poids $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ sont solutions de ce système alors pour $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$, on a

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,\mathrm{d}t = J(p) = \sum_{i=1}^{n} w_i p(\xi_i)$$

Autrement dit, la méthode de Gauss-Legendre est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$.

3. Erreur de Gauss–Legendre

La formule de Gauss–Legendre à n points est exacte jusqu'au degré $2n-1$.
Si f est suffisamment régulière (par exemple $f \in C^{2n}([-1,1])$), son erreur s'écrit

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\eta)$$

pour un certain $\eta \in]-1,1[$.

À retenir.

- n évaluations de la fonction suffisent.
- La formule est exacte jusqu'au degré $2n-1$.
- Les nœuds sont les racines du polynôme de Legendre g_n.

4. Exemple : formule de Gauss à deux points

On considère $n = 2$. Le polynôme de Legendre correspondant est

$$g_2(t) = 12t^2 - 4 = 4(3t^2 - 1).$$

Ses deux racines sont

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On cherche w_1, w_2 tels que la formule soit exacte sur $\mathbb{P}_1$. On obtient

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2, \\ -\dfrac{w_1}{\sqrt{3}} + \dfrac{w_2}{\sqrt{3}} = 0. \end{cases}$$

Donc

$$w_1 = w_2 = 1.$$

4. Exemple : formule de Gauss à deux points

La formule obtenue est donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).}$$

Vérification du degré d'exactitude.

4. Exemple : formule de Gauss à deux points

La formule obtenue est donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).}$$

Vérification du degré d'exactitude.

La formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. En effet :

$$\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t = 2 = 1+1 = J(1), \quad \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = J(t),$$

$$\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = J(t^2),$$

$$\int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t = 0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = J(t^3).$$

4. Exemple : formule de Gauss à deux points

La formule obtenue est donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \;\approx\; f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).}$$

Vérification du degré d'exactitude.

Elle n'est pas exacte au degré 4 :

$$\int_{-1}^{1} t^4\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = J(t^4).$$