Interpolation polynomiale et intégration numérique

MT09 – Exercice soutien

Objectifs. Construire un polynôme d'interpolation sous les formes de Lagrange et de Newton, en déduire une formule de quadrature, étudier son degré d'exactitude, puis comparer les erreurs des formules de Simpson et de Gauss–Legendre.

Énoncé

On considère $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, et les trois nœuds

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = 1.$$

Partie I – Interpolation polynomiale

I.1. Déterminer $f(x_0)$, $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

I.2. Écrire les trois polynômes de base de Lagrange L_0, L_1, L_2 associés aux nœuds x_0, x_1, x_2. En déduire le polynôme d'interpolation $P_2 \in \mathbb{P}_2$.

I.3. Retrouver le même polynôme avec la forme de Newton. Calculer les différences divisées $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$ et $f[x_0, x_1, x_2]$.

I.4. Rappeler la formule du reste d'interpolation et en déduire une expression de $f(x) - P_2(x)$ faisant intervenir une valeur de $f^{(3)}$.

Partie II – Construction d'une formule de quadrature

On souhaite approcher $I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant les trois valeurs $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$.

II.1. On approche $I(f)$ par $J(f) = \int_0^1 P_2(x)\,\mathrm{d}x$. En utilisant la décomposition de Lagrange, montrer que

$$J(f) = \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i), \qquad w_i = \int_0^1 L_i(x)\,\mathrm{d}x,$$

puis calculer les trois poids.

II.2. Écrire explicitement la formule de quadrature obtenue. Reconnaître une formule classique du cours et préciser le pas h dans sa notation habituelle.

II.3. Vérifier que cette formule est exacte sur $\mathbb{P}_3$, puis montrer qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{P}_4$.

Partie III – Formule de quadrature de Gauss–Legendre

On rappelle que le polynôme de Legendre de degré 2 est

$$g_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

et que ses deux racines appartiennent à $]-1, 1[$. On souhaite construire une formule de quadrature à deux points sur $[0,1]$.

III.1. Déterminer les deux racines de g_2. En effectuant le changement de variable $x = (t+1)/2$, en déduire les deux nœuds de Gauss–Legendre sur $[0, 1]$.

III.2. En imposant l'exactitude pour les polynômes de degré 0 et 1, déterminer les deux poids de la formule.

III.3. Écrire la formule de Gauss–Legendre à deux points sur $[0, 1]$. Vérifier qu'elle est exacte sur $\mathbb{P}_3$ et préciser son degré d'exactitude.

Partie IV – Comparaison des erreurs

On revient à la fonction $f(x) = 1/(1+x)$ et à l'intégrale $I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

IV.1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$, puis les approximations fournies par les formules de Simpson et de Gauss–Legendre à deux points.

IV.2. Calculer les erreurs absolues des deux méthodes. Quelle méthode est la plus précise dans cet exemple ? Comparer également le nombre d'évaluations de la fonction nécessaires.

Correction détaillée

Partie I – Interpolation polynomiale

I.1. On a

$$f(x_0) = 1, \qquad f(x_1) = \frac{2}{3}, \qquad f(x_2) = \frac{1}{2}.$$

I.2. Les polynômes de base de Lagrange sont

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1), \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -4x(x-1), \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 2x\left(x-\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P_2(x) = L_0(x) + \frac{2}{3}L_1(x) + \frac{1}{2}L_2(x),$$

et, après développement,

$$\boxed{P_2(x) = 1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}x^2.}$$

I.3. Les différences divisées d'ordre un sont

$$f[x_0,x_1] = \frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{1}{2}-0} = -\frac{2}{3}, \qquad f[x_1,x_2] = \frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

La différence divisée d'ordre deux vaut

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{1}{3}.$$

La forme de Newton donne

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &= 1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}x^2. \end{aligned}$$

I.4. Le reste d'interpolation s'écrit

$$f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

où ξ_x appartient à l'intervalle contenant x, x_0, x_1, x_2. Or

$$f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{f(x) - P_2(x) = -\frac{1}{(1+\xi_x)^4}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1).}$$

Partie II – Construction d'une formule de quadrature

II.1. Par linéarité et grâce à la formule de Lagrange,

$$J(f) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{2} f(x_i) L_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \int_0^1 L_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_0^1 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}, \\ w_1 &= \int_0^1 -4x(x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \\ w_2 &= \int_0^1 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

II.2. La formule obtenue est

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right).}$$

Il s'agit de la formule de **Simpson**. Dans la notation usuelle, $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a+2h$, avec $a = 0$ et $h = (b-a)/2 = 1/2$. Elle s'écrit

$$J(f) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

II.3. Vérifions l'exactitude sur les monômes $1, x, x^2, x^3$:

$$\begin{aligned} J(1) &= \frac{1}{6}(1+4+1) = 1 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x, \\ J(x) &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x, \\ J(x^2) &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x, \\ J(x^3) &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\frac{1}{8} + 1\right) = \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Par linéarité, la formule est exacte sur $\mathbb{P}_3$. En revanche,

$$\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}, \qquad J(x^4) = \frac{1}{6}\left(4\frac{1}{16} + 1\right) = \frac{5}{24}.$$

Ces deux valeurs étant différentes, la formule n'est pas exacte sur $\mathbb{P}_4$. Son degré d'exactitude est donc exactement $\boxed{3}$.

Partie III – Formule de quadrature de Gauss–Legendre

III.1. Les racines de g_2 sont

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Le changement de variable $x = (t+1)/2$ transforme $[-1,1]$ en $[0,1]$. Les deux nœuds sur $[0,1]$ sont donc

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}.}$$

III.2. On cherche w_1 et w_2 vérifiant :

$$\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x = w_1 P(x_1) + w_2 P(x_2),$$

pour tout P polynôme de degré au plus 1. En considérant $P(x) = 1$ et $P(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$, on en déduit que

$$\boxed{w_1 = w_2 = \frac{1}{2}.}$$

III.3. La formule obtenue est

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right].}$$

Vérifions son exactitude sur la base $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{P}_3$. En posant $a = 1/(2\sqrt{3})$, les nœuds sont $1/2 - a$ et $1/2 + a$. On a

$$\begin{aligned}
Q_2(1) &= 1 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x,\\
Q_2(x) &= \frac{1}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x,\\
Q_2(x^2) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+a\right)^2\right] = \frac{1}{4} + a^2 = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x,\\
Q_2(x^3) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-a\right)^3 + \left(\frac{1}{2}+a\right)^3\right] = \frac{1}{8} + \frac{3}{2}a^2 = \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par linéarité, la formule est exacte sur $\mathbb{P}_3$. Le théorème de Gauss–Legendre assure qu'une formule à n points est exacte jusqu'au degré $2n-1$; ici, son degré d'exactitude est donc $\boxed{3}$.

Partie IV – Comparaison des erreurs

IV.1. Une primitive de f est $\ln(1+x)$, donc

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

La formule de Simpson donne

$$S(f) = \frac{1}{6}\left(1 + 4\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{36} \approx 0.694444.$$

La formule de Gauss–Legendre à deux points donne, en évaluant f aux nœuds trouvés à la partie III,

$$\begin{aligned}
G(f) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+1}\right) = \frac{9}{13} \approx 0.692308.
\end{aligned}$$

IV.2. Les erreurs signées $E_S(f) = I(f) - S(f)$ et $E_G(f) = I(f) - G(f)$ sont

$$E_S(f) = \ln 2 - \frac{25}{36} \approx -1.2973 \times 10^{-3}, \qquad E_G(f) = \ln 2 - \frac{9}{13} \approx 8.3949 \times 10^{-4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{|E_G(f)| < |E_S(f)|.}$$

Dans cet exemple, Gauss–Legendre est donc plus précis : son erreur absolue est environ 35% plus petite que celle de Simpson. De plus, la formule de Gauss–Legendre nécessite seulement deux évaluations de f, contre trois pour Simpson.