

# MT02-Fonctions d'une variable réelle

---

## *Chapitre 3 : Suites numériques*

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

---

*Printemps 2023*



# Chapitre 3

## Suites numériques

3.1	Définition, convergence, propriétés . . . . .	3
3.2	Suites particulières . . . . .	32
3.3	Notions élémentaires sur les séries . . . . .	40

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 3.1 Définition, convergence, propriétés

3.1.1	Définition d'une suite numérique . . . . .	4
3.1.2	Convergence d'une suite numérique . . . . .	5
3.1.3	Exemples de suites et limite . . . . .	7
3.1.4	Unicité de la limite . . . . .	9
3.1.5	Suite extraite . . . . .	11
3.1.6	Suite majorée ou minorée . . . . .	13
3.1.7	Suite croissante ou décroissante . . . . .	15
3.1.8	Somme de suites numériques convergentes . . . . .	17
3.1.9	Comparaison de deux suites . . . . .	19
3.1.10	Produit de suites numériques convergentes . . . . .	23
3.1.11	Somme et produit de suites qui tendent vers l'infini . . . . .	25
3.1.12	Quotient de deux suites . . . . .	27
3.1.13	Suites équivalentes . . . . .	30

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.1 Définition d'une suite numérique

**Exercices :**

[Exercice A.1.1](#)

**Définition 3.1.1.** On appelle **suite de nombres réels** une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . Cette application sera souvent notée  $n \mapsto \mathbf{u}_n$  (au lieu de  $n \mapsto u(n)$ ) et on dira que  $u_n$  est le **terme général de la suite**, on notera alors  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou plus simplement  $(\mathbf{u}_n)$ , la suite ainsi définie.

Les trois suites ci-dessous sont définies par la donnée de leur terme général :

$$u_n = n, \quad u_n = \frac{1}{n}, (n > 0), \quad u_n = \frac{n}{n+1}, \dots$$

étant donné un réel  $a$ , la suite  $u_n = a$ , est appelée **suite constante**.

On peut aussi définir une suite par une relation de récurrence. Ainsi,  $a$  et  $u_0$  étant des réels donnés, la suite  $u_n = a + u_{n-1}$  est une **suite arithmétique** dont le terme général est  $u_n = na + u_0$ .

Une suite est donc une application particulière. Le point fondamental est que le domaine de définition est  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^*$ . D'autre part, l'objectif principal dans l'étude d'une suite n'est pas tant cette application elle-même que son comportement à l'infini. Ceci s'oppose notamment au cas des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  où l'on s'intéresse aussi à ce qui se passe autour des valeurs finies de la variable.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 3.1.2 Convergence d'une suite numérique

### Exercices :

[Exercice A.1.2](#)

[Exercice A.1.3](#)

### Définition 3.1.2.

1. On dit que la suite  $(u_n)$  **converge** ou qu'elle est **convergente** s'il existe un réel  $l$  (appelé **limite**) tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

On dit que  $u_n$  **tend vers**  $l$ , et on écrit  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ .

2. Si  $(u_n)$  n'est pas convergente, on dit qu'elle **diverge** ou qu'elle est **divergente**.
3. On dit qu'une suite  $(u_n)$  **tend vers**  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (u_n > A).$$

On dit qu'une suite  $(u_n)$  **tend vers**  $-\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (u_n < -A).$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Remarquons que :

1. La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si et seulement si la suite de terme général  $v_n = u_n - \ell$  converge vers 0
2. Pour tout  $\varepsilon$  (aussi petit soit-il), l'intervalle  $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ , contient tous les éléments de la suite sauf un nombre fini de termes, les  $N$  premiers.
3. Il résulte immédiatement de cette définition que la **nature d'une suite** (sa convergence ou non convergence) ne change pas, si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite, ou si l'on démarre la suite par un indice plus grand que 0.
4. La convergence de la suite  $(u_n)$  peut s'écrire entièrement avec des quantificateurs :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

Cette écriture avec uniquement des quantificateurs facilite l'expression de la **divergence**.

5. On peut montrer que la définition de la convergence donnée plus haut est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon).$$

**Proposition 3.1.1.** Si la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ , alors la suite  $(|u_n|)$  converge vers  $|l|$ .

Pour démontrer ce résultat il suffit d'utiliser l'inégalité  $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$ .

## Convergence d'une suite numérique

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.3 Exemples de suites et limite

**Exercices :**

[Exercice A.1.4](#)

**Exemples :**

[Exemple B.1.1](#)

[Exemple B.1.2](#)

[Exemple B.1.3](#)

Donnons quelques exemples :

1. La suite  $u_n = -\frac{3n-2}{2n+5}$  a pour limite  $l = -\frac{3}{2}$  car

$$|u_n - l| = \left| -\frac{3n-2}{2n+5} + \frac{3}{2} \right| = \frac{19}{4n+10}.$$

Nous voyons alors que pour  $\varepsilon > 0$  donné, il suffit de choisir l'entier  $N$  tel que

$$\frac{19}{4N+10} \leq \varepsilon \quad \text{soit} \quad N \geq \frac{19}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}.$$

Alors pour  $n > N$  on a :

$$|u_n - l| = \frac{19}{4n+10} < \frac{19}{4N+10} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que  $u_n \rightarrow l$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

2. Examinons la suite

$$u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n.$$

On peut écrire

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \leq \frac{1}{2n},$$

puisque  $\sqrt{n^2 + 1} \geq n$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on prend  $N$  entier tel que  $N \geq \frac{1}{2\varepsilon}$ , alors pour  $n > N$  on a :

$$|u_n| = u_n \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que  $u_n \rightarrow 0$ .

Vous verrez dans les exemples référencés trois méthodes numériques pour calculer, de manière approchée, l'intégrale d'une fonction dont on ne connaît pas la primitive. Ceci revient à construire des suites dont la vitesse de convergence (notion qualitative ici, définie précisément dans les cours d'analyse numérique) dépend de la méthode considérée.

## Exemples de suites et limite

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.4 Unicité de la limite

**Exercices :**[Exercice A.1.5](#)

**Proposition 3.1.2.** *La limite d'une suite convergente est unique.*

*Démonstration* - Supposons qu'il existe deux limites distinctes  $l_1$  et  $l_2$ . Sans restreindre la généralité, nous pouvons noter  $l_1$  la plus grande des deux, soit  $l_1 > l_2$ . Posons  $\varepsilon = (l_1 - l_2)/2$ , alors puisque  $u_n$  converge vers  $l_1$  et  $l_2$  respectivement :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } (n > N_1) \Rightarrow (|u_n - l_1| < \varepsilon),$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } (n > N_2) \Rightarrow (|u_n - l_2| < \varepsilon)$$

On obtient alors pour  $n > \max(N_1, N_2)$  :

$$2\varepsilon = l_1 - l_2 = |l_1 - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < 2\varepsilon$$

ce qui est absurde.

Lorsque vous étudiez la suite  $u_n = (-1)^n$ , vous avez envie de dire que pour  $n$  pair la suite est constante  $u_{2n} = 1$  donc convergente et pour  $n$  impair la suite est aussi constante  $u_{2n+1} = -1$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

donc convergente, ce qui est faux puisque cela donnerait une suite convergente avec deux limites distinctes! L'erreur de raisonnement est que vous considérez deux sous-suites et non pas la suite dans sa totalité dont les termes oscillent constamment de 1 à  $-1$ .

## Unicité de la limite

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.5 Suite extraite

#### Exercices :

[Exercice A.1.6](#)

**Définition 3.1.3.** Une *suite extraite* (ou sous-suite) d'une suite  $(u_n)$  est une suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application strictement croissante. Il s'agit de la suite de termes :

$$u_{\varphi(1)}, u_{\varphi(2)}, \dots, u_{\varphi(n)}, \dots$$

Par exemple,

- la suite  $(u_{n+1})$  est une suite extraite de la suite  $(u_n)$ .
- la suite  $(u_{2n})$  composée des termes d'indices pairs

$$u_0, u_2, u_4, \dots, u_{2n}, \dots$$

est une suite extraite de  $(u_n)$ ,

- la suite  $(u_{2n+1})$  composée des termes d'indices impairs

$$u_1, u_3, u_5, \dots, u_{2n+1}, \dots$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Proposition 3.1.3.** *Si  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  alors toute suite extraite  $(u_{\varphi(n)})$  de  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  également.*

*Démonstration* - voir l'exercice référencé A.1.6

La contraposée de cette proposition est très utile pour démontrer qu'une suite diverge!

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \quad \text{et} \quad (-1)^{2n+1} = -1$$

La suite extraite  $(u_{2n})$  est constante et donc convergente vers la limite  $\ell_1 = 1$ . La suite extraite  $(u_{2n+1})$  est constante et donc également convergente vers la limite  $\ell_2 = -1$ . Puisque  $(u_n)$  admet deux sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergeant vers deux limites différentes, on en déduit que  $(u_n)$  diverge.

## Suite extraite

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.6 Suite majorée ou minorée

#### Exercices :

[Exercice A.1.7](#)

**Définition 3.1.4.** Une suite  $(u_n)$  est dite **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe un réel  $M$  (resp.  $m$ ) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M \text{ (resp. } m \leq u_n \text{)}.$$

Une suite  $(u_n)$  est dite **bornée**, si elle est à la fois majorée et minorée.

En reprenant les définitions du chapitre 2, on voit que la suite  $(u_n)$  est majorée si et seulement si l'ensemble  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble majoré, il en est de même pour minorée ou bornée. On a donc un résultat similaire à celui démontré dans le chapitre 2, à savoir :

Une suite  $(u_n)$  est bornée si et seulement si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

D'autre part on remarque que pour qu'une suite soit majorée, il suffit qu'il existe un nombre réel  $M'$  tel que  $u_n \leq M'$  à partir d'un certain rang  $N$ . En effet,

$$M = \max\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, M'\}$$

est alors un majorant de la suite complète.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

De même une suite est bornée s'il existe un réel  $M$  positif, tel que, à partir d'un certain rang  $N$ , on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (N \leq n) \Rightarrow (|u_n| \leq M).$$

**Proposition 3.1.4.** *Tout suite convergente est bornée.*

*Démonstration* - Partons de la définition de la convergence et donnons nous un  $\varepsilon > 0$ . La suite  $(u_n)$  étant convergente, possède une limite  $l$  et il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$(n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

Comme, par ailleurs :

$$(|u_n - l| < \varepsilon) \Leftrightarrow (l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon),$$

si on définit les nombres  $M$  et  $m$  par

$$M = \max(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, l + \varepsilon), \quad m = \min(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, l - \varepsilon)$$

on vérifie bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M.$$

**Suite majorée  
ou minorée**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.7 Suite croissante ou décroissante

**Exercices :**[Exercice A.1.8](#)[Exercice A.1.9](#)[Exercice A.1.10](#)

**Définition 3.1.5.** Une suite  $(u_n)$  est dite **croissante** (resp. **décroissante**) si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \text{ (resp. } u_{n+1} \leq u_n \text{)}.$$

Une suite est dite **monotone** si elle est **croissante** ou **décroissante**.

**Théorème 3.1.1.** Toute suite croissante et majorée est convergente. De même, toute suite décroissante et minorée est convergente.

*Démonstration* - Puisque  $(u_n)$  est une suite majorée, l'ensemble  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  est majoré. D'après la propriété de la borne supérieure définie pour tout sous-ensemble non vide borné de  $\mathbb{R}$  au chapitre précédent,  $A$  admet une borne supérieure  $L$ . La caractérisation de la borne supérieure permet de dire que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $L - \varepsilon$  n'est pas un majorant de  $A$  donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } L - \varepsilon < u_N \leq L.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Mais comme la suite est croissante, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (L - \varepsilon < u_N \leq u_n).$$

D'autre part, comme  $L$  est un majorant de  $u_n$ , nous avons ainsi montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (L - \varepsilon < u_n \leq L),$$

soit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (0 \leq L - u_n < \varepsilon),$$

ce qui montre le résultat.

On démontre de la même manière qu'une suite décroissante et minorée est convergente.

**Proposition 3.1.5.** *Soit  $(u_n)$  une suite croissante convergeant vers une limite  $l$ , alors quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq l$ .*

Démontrer cette proposition en exercice.

**Suite  
croissante ou  
décroissante**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.8 Somme de suites numériques convergentes

**Exercices :**

[Exercice A.1.11](#)

**Définition 3.1.6.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels.

On appelle **somme** de ces deux suites la suite  $(s_n)$  dont le terme général est défini par  $s_n = u_n + v_n$ .

On peut aussi multiplier une suite  $(u_n)$  par un nombre réel  $\lambda$ , ce qui donne la suite  $(\lambda u_n)$ .

**Théorème 3.1.2.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites convergentes dont on notera  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  les limites respectives. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \hat{u} + \hat{v}, \quad (3.1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n) = \lambda \hat{u}. \quad (3.1.2)$$

*Démonstration* - La démonstration pour la somme est faite en exercice. Pour le produit par un scalaire, on peut écrire :

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Si  $\lambda = 0$ , la suite  $(\lambda u_n)$  est la suite nulle, elle converge bien vers  $\lambda \hat{u} = 0$ .

On suppose maintenant que  $\lambda \neq 0$ .

$$|\lambda u_n - \lambda \hat{u}| = |\lambda| |u_n - \hat{u}|$$

La suite  $(u_n)$  converge, donc pour tout  $\varepsilon > 0$  donné,

$$\exists N, (n > N) \Rightarrow (|u_n - \hat{u}| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|})$$

Ce qui permet de conclure.

## Somme de suites numériques convergentes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 3.1.9 Comparaison de deux suites

**Exercices :**[Exercice A.1.12](#)[Exercice A.1.13](#)**Exemples :**[Exemple B.1.4](#)[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Théorème 3.1.3.** (Théorème de comparaison)

1. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente de limite  $\hat{u}$  et si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$

alors  $\hat{u} \geq 0$ .

2. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites convergentes de limites respectives  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  et si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n,$$

alors  $\hat{u} \leq \hat{v}$ .

3. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites convergentes ayant la même limite  $l$  et si  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n \leq v_n,$$

alors la suite  $(w_n)$  est convergente et a pour limite  $l$ .

4. Si  $(v_n)$  est une suite convergeant vers 0 et si la suite  $(u_n)$  vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n,$$

alors la suite  $(u_n)$  tend vers 0.

Quelques remarques avant de démontrer ce théorème :

Les points 1 et 2 ne permettent pas de démontrer que des suites convergent, ils permettent seulement, quand on connaît la convergence des suites, d'avoir des propriétés sur les limites.

**Comparaison  
de deux suites**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Par contre les points 3 et 4 permettent de démontrer que, sous certaines conditions, des suites convergent.

Pour le point 2, même si l'on avait l'inégalité stricte

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n,$$

on n'obtiendrait, à la limite, que l'inégalité large  $\hat{u} \leq \hat{v}$ .

Cela signifie que l'inégalité stricte devient, à la limite, une inégalité large. En effet, soient les deux suites de terme général  $u_n = 0$  et  $v_n = \frac{1}{n}$ , alors on a bien  $u_n < v_n$ , mais la limite est nulle pour les deux suites.

*Démonstration -*

1. Nous allons raisonner par contraposée et supposons que  $\hat{u} < 0$ . Alors, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\hat{u} < \hat{u} + \varepsilon < 0$ . Or la convergence de  $(u_n)$  implique que pour cet  $\varepsilon$  on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow \hat{u} - \varepsilon < u_n < \hat{u} + \varepsilon.$$

On obtient donc des indices  $n$  pour lesquels  $u_n < \hat{u} + \varepsilon < 0$  ce qui est la négation de  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ .

2. La démonstration découle immédiatement du point précédent. En effet, on peut récrire la proposition à démontrer sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \geq 0 \Rightarrow \hat{v} - \hat{u} \geq 0.$$

En posant  $w_n = u_n - v_n$  et  $\hat{w} = \hat{v} - \hat{u}$ , on obtient une suite convergente (somme de deux suites convergentes dont les limites s'ajoutent) à laquelle on peut appliquer la proposition précédente, ce qui donne le résultat.

## Comparaison de deux suites

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

3. Pour démontrer que la suite  $(w_n)$  est convergente, écrivons les convergences des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  vers  $l$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N_1) \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N_2) \Rightarrow l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon.$$

Donc, pour  $\varepsilon > 0$  donné, on pose  $N = \max(N_1, N_2)$  et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow l - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < l + \varepsilon,$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite  $(w_n)$  est convergente de limite  $l$ .

4. A démontrer en exercice.

**Corollaire 3.1.1.** *Soit  $(v_n)$  une suite convergeant vers 0 et soit  $(u_n)$  une suite bornée, alors la suite  $(u_n v_n)$  tend vers 0.*

Démontrez ce corollaire en exercice.

## Comparaison de deux suites

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.10 Produit de suites numériques convergentes

**Définition 3.1.7.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels.

On appelle **produit** de ces deux suites la suite  $(w_n)$  dont le terme général est défini par  $w_n = u_n \cdot v_n$ .

On peut remarquer que le produit d'une suite  $(u_n)$  par un nombre réel  $\lambda$ , est un cas particulier du produit des suites. En effet, on peut considérer avoir formé ainsi, le produit de la suite  $(u_n)$  par la suite constante  $(v_n)$ , dont tous les termes sont égaux à  $\lambda$ .

**Théorème 3.1.4.** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites convergentes dont on notera  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  les limites respectives, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = \hat{u} \hat{v}. \quad (3.1.3)$$

*Démonstration* - On peut écrire :

$$u_n v_n - \hat{u} \hat{v} = (u_n - \hat{u}) v_n + (v_n - \hat{v}) \hat{u}.$$

La suite  $(u_n - \hat{u})$  converge vers 0. La suite  $(v_n)$  converge donc elle est bornée. On utilise le corollaire 3.1.1, la suite  $((u_n - \hat{u}) v_n)$  converge donc vers 0.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

$\hat{u}$  est une constante, la suite  $(v_n - \hat{v})$  converge vers 0, donc la suite  $(\hat{u}(v_n - \hat{v}))$  converge vers  $\hat{u} \times 0 = 0$ .

On utilise enfin le théorème sur la somme de suites convergentes, on en déduit que la suite  $(u_n v_n - \hat{u} \hat{v})$  converge vers 0, ce qui termine la démonstration.

## Produit de suites numériques convergentes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.11 Somme et produit de suites qui tendent vers l'infini

**Exercices :**

[Exercice A.1.14](#)

- Théorème 3.1.5.**
1. *La somme de deux suites qui tendent vers  $+\infty$  (resp  $-\infty$ ) tend vers  $+\infty$  (resp  $-\infty$ ).*
  2. *La somme d'une suite qui tend vers  $+\infty$  (resp  $-\infty$ ) et d'une suite minorée (resp majorée) tend vers  $+\infty$  (resp  $-\infty$ ).*
  3. *Le produit de deux suites qui tendent vers  $+\infty$  tend vers  $+\infty$ .*
  4. *Le produit d'une suite qui tend vers  $+\infty$  et d'une suite qui tend vers  $l$  avec  $l > 0$  (resp  $l < 0$ ) tend vers  $+\infty$  (resp  $-\infty$ ).*

La démonstration des 3 premières propositions est simple, montrons la dernière proposition.

$(u_n)$  converge vers  $l > 0$ , on peut choisir  $\varepsilon = \frac{l}{2}$ , alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} < u_n)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

$(v_n)$  tend vers l'infini donc

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \left( n > N_2 \Rightarrow v_n > \frac{2A}{l} \right)$$

On a donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N = \max(N_1, N_2), \forall n \in \mathbb{N} \left( n > N \Rightarrow u_n v_n > \frac{2A}{l} \times \frac{l}{2} = A \right).$$

Ce qui termine la démonstration.

Bien sûr les deux théorèmes précédents ne permettent pas de conclure quant à la somme d'une suite qui tend vers  $+\infty$  et d'une suite qui tend vers  $-\infty$ , c'est ce que l'on appelle une indétermination du type  $+\infty - \infty$ . On ne peut pas conclure non plus dans le cas du produit d'une suite qui tend vers l'infini et d'une suite qui converge vers 0 : c'est une indétermination du type  $0 \times \infty$ .

**Théorème 3.1.6.** *Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (resp  $-\infty$ ), si  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$  (resp  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$ ), alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (resp  $-\infty$ ).*

**Somme et  
produit de  
suites qui  
tendent vers  
l'infini**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.12 Quotient de deux suites

**Exercices :**[Exercice A.1.15](#)

**Définition 3.1.8.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels. Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dont tous les termes sont non nuls, on peut définir le **quotient** de la suite  $(u_n)$  par la suite  $(v_n)$  comme la suite  $(d_n)$  dont le terme général est défini par  $d_n = \frac{u_n}{v_n}$ .

Si la suite  $(u_n)$  est telle que  $u_n = 1$ , pour tout  $n$ , alors la suite

$$d_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{v_n},$$

est souvent appelée **suite inverse** de la suite  $(v_n)$ .

**Théorème 3.1.7.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites convergentes dont on notera  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  les limites respectives. Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dont tous les termes sont non nuls et dont la limite  $\hat{v}$  est non nulle alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\hat{u}}{\hat{v}} \quad (3.1.4)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

*Démonstration* - Le principe de la démonstration va être de considérer la suite quotient  $(u_n/v_n)$  comme le produit de la suite  $(u_n)$  par la suite  $(1/v_n)$ . Il suffit alors de montrer que cette dernière suite converge vers  $1/\hat{v}$  et d'utiliser ensuite le résultat sur le produit de deux suites convergentes.

Montrons donc la convergence de la suite  $\left(\frac{1}{v_n}\right)$  vers  $\left(\frac{1}{\hat{v}}\right)$ . Cela est équivalent à montrer que  $\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\hat{v}}\right)$  est une suite qui tend vers 0.

$$\text{Pour cela on calcule } \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\hat{v}} \right| = \left| \frac{\hat{v} - v_n}{v_n \hat{v}} \right|.$$

Si on montre que  $|v_n|$  est minorée par  $m > 0$ , on aura alors  $\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\hat{v}} \right| \leq \frac{1}{m|\hat{v}|} |\hat{v} - v_n|$  et le théorème de comparaison des suites permet de conclure.

Montrons qu'il existe  $m > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq |v_n|$ . Puisque la suite  $(v_n)$  est convergente vers  $\hat{v} \neq 0$ , nous pouvons choisir  $\varepsilon = \frac{|\hat{v}|}{2}$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left( n > N \Rightarrow |v_n - \hat{v}| < \frac{|\hat{v}|}{2} \Rightarrow ||v_n| - |\hat{v}|| < \frac{|\hat{v}|}{2} \Rightarrow \frac{|\hat{v}|}{2} < |v_n| \right)$$

On peut alors poser  $m = \min\left(|v_0|, \dots, |v_{N-1}|, \frac{|\hat{v}|}{2}\right)$ , on aura bien  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq |v_n|$

**Théorème 3.1.8.** Soit  $(u_n)$  une suite qui tend vers l'infini, on suppose que

$$\forall n, u_n \neq 0, \text{ alors } \left(\frac{1}{u_n}\right) \text{ tend vers } 0.$$

## Quotient de deux suites

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Théorème 3.1.9.** Soit  $(u_n)$  une suite qui tend vers 0, on suppose que  $\forall n, u_n > 0$ , alors  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  tend vers  $+\infty$ .

Ces deux théorèmes se démontrent très facilement.

## Quotient de deux suites

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.1.13 Suites équivalentes

**Exercices :**  
[Exercice A.1.16](#)

**Exercices :**  
[Exercice A.1.17](#)

**Définition 3.1.9.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels. On dit que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont **équivalentes** s'il existe une suite convergente  $(w_n)$  telle que

$$u_n = w_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1.$$

On écrit  $u_n \sim v_n$ .

En pratique, si on sait que  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang, on applique plutôt le critère suivant

$$u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Par exemple,

$$2^n + 3^n \sim 3^n.$$

En effet,

$$\frac{2^n + 3^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Proposition 3.1.6.** Soit  $P$  un polynôme de degré  $p \in \mathbb{N}$  défini par

$$P(x) = a_0x + a_1x + \cdots + a_px^p \text{ avec } (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \text{ et } a_p \neq 0.$$

La suite  $(u_n)$ , définie par  $u_n = P(n)$ , est équivalente au monôme de plus haut degré :

$$u_n \sim a_p n^p.$$

Considérons les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_n = n - n^2$  et  $v_n = (n - 1)^2$ . On a

$$u_n \sim -n^2, \quad v_n \sim n^2 \quad u_n + v_n = -n + 1 \sim (-n) \text{ (et non } 0\text{!)}$$

Il est interdit d'effectuer des sommes sur les équivalents.

**Proposition 3.1.7** (Opérations sur les équivalents). Soit  $u_n \sim u'_n$  et  $v_n \sim v'_n$ . Alors,

1.  $u_n v_n \sim u'_n v'_n$
2.  $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$  si  $v_n \neq 0$  et  $v'_n \neq 0$  à partir d'un certain rang.

## Suites équivalentes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 3.2 Suites particulières

3.2.1	Suites adjacentes	33
3.2.2	Suites de Cauchy	35
3.2.3	Suites récurrentes	38

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.2.1 Suites adjacentes

**Exercices :**

[Exercice A.1.18](#)

**Exemples :**

[Exemple B.1.5](#)

**Théorème 3.2.1.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de nombres réels, telles que :

1. la suite  $(u_n)$  est croissante,
2. la suite  $(v_n)$  est décroissante,
3. la suite  $(v_n - u_n)$  tend vers 0.

Alors les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent toutes deux vers la même limite.

*Démonstration* - La suite  $(v_n)$  est décroissante par hypothèse. Comme la suite  $(u_n)$  est croissante, la suite  $(-u_n)$  est décroissante, de sorte que la suite  $(v_n - u_n)$  est aussi décroissante. Comme en outre, cette dernière suite converge vers 0 par hypothèse, nous en déduisons que tous ses termes  $v_n - u_n$  sont positifs ou nuls, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

nous en déduisons aussitôt que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est majorée par  $v_0$ , tandis que la suite  $(v_n)$  est minorée par  $u_0$ . La suite  $(u_n)$ , étant croissante et majorée, est convergente et soit  $l$  sa limite. De même la suite  $(v_n)$  décroissante et minorée est convergente et soit  $L$  sa limite. Il reste à démontrer que  $l = L$ .

Sachant que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent respectivement vers  $l$  et  $L$ , nous en déduisons que la suite  $(v_n - u_n)$  converge vers  $L - l$ . Sachant par ailleurs que cette suite converge vers 0, nous arrivons à  $L - l = 0$ , du fait de l'unicité de la limite d'une suite.

Le théorème précédent, très utilisé, nous conduit à la définition suivante :

**Définition 3.2.1.** Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  possédant les propriétés (1), (2) et (3) du théorème précédent, sont dites **adjacentes**.

Lorsque deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, elles vérifient :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_m \leq v_n.$$

Autrement dit chaque terme de la suite  $(u_n)$  est inférieur à tous les termes de la suite  $(v_n)$ . Ceci se vérifie en écrivant que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m \leq n) \Rightarrow (u_m \leq u_n \leq v_n \leq v_m).$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## 3.2.2 Suites de Cauchy

### Exercices :

[Exercice A.1.19](#)[Exercice A.1.20](#)

### Exemples :

[Exemple B.1.6](#)[Exemple B.1.7](#)

### Documents :

[Document C.1.1](#)[Document C.1.2](#)[Document C.1.3](#)

Lorsque l'on ne connaît pas la limite éventuelle d'une suite, pour démontrer qu'elle est convergente, on peut montrer qu'elle est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) ou utiliser les suites de Cauchy.

**Définition 3.2.2.** La suite  $(u_n)$  est une **suite de Cauchy** si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \{(m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\} \Rightarrow (|u_m - u_n| \leq \varepsilon). \end{array} \right.$$

On montrera en exercice que cela est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon). \end{array} \right.$$

Que signifie cette propriété? Elle signifie que, aussi petit que soit  $\varepsilon$ , à partir d'un certain rang tous les éléments de la suite se trouvent dans un intervalle de longueur  $\varepsilon$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Proposition 3.2.1.** *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

*Démonstration* - Cela résulte directement de l'inégalité :

$$|u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m|.$$

En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que  $(n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2})$  et donc pour  $n, m \geq N$ , on a :

$$|u_n - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cette proposition admet une réciproque, que nous démontrons dans le deuxième document référencé. Finalement, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.2.** *Une suite de nombres réels est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Le résultat précédent est utile aussi bien pour montrer qu'une suite est convergente que pour démontrer qu'une suite diverge.

Ainsi, soit la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 1. \end{cases}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

On a donc :

$$u_1 = 1, u_2 = 1 + \frac{1}{2}, u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$$

Montrons que cette suite n'est pas une suite de Cauchy. Pour cela on considère

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{n+1}.$$

Comme chacun des  $n$  termes du membre de droite de l'égalité précédente est minoré par  $\frac{1}{2n}$  on peut écrire :

$$u_{2n} - u_n \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Il suffit alors de prendre  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  pour voir que la condition (C.1.3) est contredite, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{4}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m = 2N, \exists n = N \text{ tels que } |u_m - u_n| > \varepsilon.$$

## Suites de Cauchy

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.2.3 Suites récurrentes

**Exercices :**[Exercice A.1.21](#)[Exercice A.1.22](#)[Exercice A.1.23](#)**Exemples :**[Exemple B.1.8](#)**Documents :**[Document C.1.4](#)

On peut définir une suite  $(u_n)$  :

- soit, en donnant une formule explicite exprimant  $u_n$  en fonction de  $n$ , par exemple  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,
- soit en exprimant  $u_n$  en fonction de  $n$  et de certains termes précédents, par exemple

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Un cas particulier de cette deuxième méthode de construction de suites est le suivant :  $f$  étant une application de  $\mathbb{R}$  dans lui-même supposée connue, on pose :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné,} \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 0, \end{cases}$$

On dit alors que l'on a une **suite récurrente d'ordre 1** (ordre 1 signifiant que seul le terme  $u_n$  intervient explicitement dans la définition de  $u_{n+1}$ ).

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Proposition 3.2.2.** Si la fonction  $f$  vérifie la condition suivante, dite **condition de Lipschitz** :

$$(L) \quad \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

si de plus  $0 < K < 1$ , et s'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $l = f(l)$ , alors la suite récurrente  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers  $l$ .

*Démonstration* - Puisque  $l = f(l)$ , et que  $f$  vérifie une condition de Lipschitz on a

$$|u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \leq K|u_{n-1} - l|.$$

En itérant, on obtient

$$0 \leq |u_n - l| \leq K^n |u_0 - l|.$$

Vous montrerez en exercice que  $K^n$  est une suite qui converge vers 0. En utilisant le troisième point du théorème 3.1.3 sur les comparaisons de suites on en déduit que la suite  $(|u_n - l|)$  converge vers 0. D'où la suite  $(u_n - l)$  converge vers 0 et la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

Il n'est pas nécessaire de connaître la limite  $l$  pour montrer que la suite récurrente est convergente, voir le document C.1.4.

## Suites récurrentes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 3.3 Notions élémentaires sur les séries

<a href="#">3.3.1</a>	<a href="#">Définition d'une série</a>	<a href="#">41</a>
<a href="#">3.3.2</a>	<a href="#">Convergence d'une série</a>	<a href="#">42</a>
<a href="#">3.3.3</a>	<a href="#">Les règles de Riemann</a>	<a href="#">45</a>

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.3.1 Définition d'une série

Nous avons déjà vu des expressions de la forme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$$

associées à la suite  $(u_n)$ . à partir d'une suite on peut donc constituer une nouvelle suite obtenue en sommant tous les termes jusqu'à l'ordre  $n$ .

**Définition 3.3.1.** *Étant donnée une suite  $(u_n)$ , on appelle **série de terme général**  $u_n$  la suite  $(S_n)$  dont le terme général est la somme partielle*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i.$$

Voici quelques exemples de séries :

— Série **géométrique** :

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n.$$

— Série **harmonique** :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

— Série **alternée** :

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.3.2 Convergence d'une série

**Exercices :**

[Exercice A.1.24](#)

**Documents :**

[Document C.1.5](#)

**Exemples :**

[Exemple B.1.9](#)

**Définition 3.3.2.** On dit que la série de terme général  $u_n$  est **convergente** (resp. **divergente**) si la suite  $(S_n)$  constituée des sommes partielles est une suite convergente (resp. divergente). Si on note :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

alors on dit que  $S$  est la **somme de la série** et on écrit

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} u_i.$$

Attention, bien que les expressions de  $S_n$  et  $S$  se ressemblent, elles ne sont pas du tout de même nature  $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$  est une somme finie de  $(n+1)$  termes, alors que  $S = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$  par définition est une limite (la limite de la suite  $S_n$ ).

La nature d'une série (c'est-à-dire sa convergence ou divergence) est, comme celle des suites, inchangée si l'on modifie un nombre fini de ses termes. Mais sa somme (quand elle est conver-

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

gente) sera changée. Il est donc important, dans le calcul de la somme d'une série, de préciser le domaine de variation de l'indice  $n$ .

Soit la série géométrique, le premier document référencé montre que, pour  $r \neq 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}, \quad S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Ceci montre que la série est convergente si  $|r| < 1$  et que dans ce cas on a

$$\forall r \in ]-1, +1[, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

Par contre elle diverge pour toutes les autres valeurs de  $r$ .

**Proposition 3.3.1.** Une condition **nécessaire** de convergence d'une série est que son terme général tende vers 0.

*Démonstration* - Si la suite  $(S_n)$  tend vers une limite  $S$ , il est clair qu'il en est de même de la suite  $(S_{n+1})$ , donc la suite  $(S_{n+1} - S_n) = (u_n)$  tend vers 0.

## Convergence d'une série

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Proposition 3.3.2** (opérations sur les séries). Soient  $(\sum_{k=0}^n u_n)$  et  $(\sum_{k=0}^n v_n)$  deux séries convergentes. Alors,

1. la série somme  $(\sum_{k=0}^n (u_n + v_n))$  converge et on a  $\sum_{k=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{k=0}^{\infty} u_n + \sum_{k=0}^{\infty} v_n$ ,
2. si  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors la série  $(\sum_{k=0}^n (\lambda u_n))$  converge et on a  $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_n$ .

## Convergence d'une série

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 3.3.3 Les règles de Riemann

**Exercices :**[Exercice A.1.25](#)**Documents :**[Document C.1.6](#)

Comme application du critère de Cauchy, nous avons montré que la série harmonique

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

diverge, tandis que

$$T_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},$$

est convergente (Exemple [B.1.9](#)). On montre, mais cette démonstration sort du cadre de ce cours, que sa somme est égale à  $T = \pi^2/6$ . Ce sont des séries de Riemann.

**Définition 3.3.3.** Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on appelle *série de Riemann* la série  $(S_n)$  de terme général  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Si  $\alpha \leq 1$ , la série est divergente et tend vers  $+\infty$ .
2. Si  $\alpha > 1$ , la série est convergente.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Nous démontrerons ces résultats à l'aide des intégrales de Riemann au chapitre 7.

**Proposition 3.3.3.** Soient  $(\sum_{k=0}^n u_n)$  et  $(\sum_{k=0}^n v_n)$  deux séries à termes généraux réels positifs telles que  $u_n \sim v_n$ .

1. Si  $(\sum_{k=0}^n u_n)$  converge alors  $(\sum_{k=0}^n v_n)$  converge également.
2. Si  $(\sum_{k=0}^n u_n)$  diverge alors  $(\sum_{k=0}^n v_n)$  diverge également.

**Théorème 3.3.1** (Règle de Riemann). Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels positifs. On suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $A > 0$  tel que

$$u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}.$$

Alors  $(\sum_{k=0}^n u_n)$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

Par exemple, considérons la série de terme général  $u_n = \frac{n + \cos n}{2n^3 + 1}$ . On a

$$u_n = \frac{n}{2n^3} \times \frac{1 + \frac{\cos n}{n}}{1 + \frac{1}{2n^3}} \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{2n^2}.$$

## Les règles de Riemann

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

On en déduit que la série  $(\sum_{k=0}^n u_n)$  converge.

Dans le document référencé, on définit les séries absolument convergente dont un cas particulier sont les séries de terme général absolument majorable par  $\frac{A}{n^\alpha}$ , avec  $A > 0$  fixé.

## Les règles de Riemann

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe A

## Exercices

A.1	Exercices du chapitre 3 . . . . .	50
A.2	Exercices de TD . . . . .	76

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## A.1 Exercices du chapitre 3

A.1.1	Ch3-Exercice1	51
A.1.2	Ch3-Exercice2	52
A.1.3	Ch3-Exercice3	53
A.1.4	Ch3-Exercice4	54
A.1.5	Ch3-Exercice5	55
A.1.6	Ch3-Exercice6	56
A.1.7	Ch3-Exercice7	57
A.1.8	Ch3-Exercice8	58
A.1.9	Ch3-Exercice9	59
A.1.10	Ch3-Exercice10	60
A.1.11	Ch3-Exercice11	61
A.1.12	Ch3-Exercice12	62
A.1.13	Ch3-Exercice13	63
A.1.14	Ch3-Exercice14	64
A.1.15	Ch3-Exercice15	65
A.1.16	Ch3-Exercice16	66
A.1.17	Ch3-Exercice17	67
A.1.18	Ch3-Exercice18	68
A.1.19	Ch3-Exercice19	69
A.1.20	Ch3-Exercice20	70
A.1.21	Ch3-Exercice21	71
A.1.22	Ch3-Exercice22	72

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

A.1.23	Ch3-Exercice23	.....	73
A.1.24	Ch3-Exercice24	.....	74
A.1.25	Ch3-Exercice25	.....	75

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.1 Ch3-Exercice1

Soient  $\alpha$  et  $u_0$  deux réels donnés. Soit alors  $(u_n)$  une suite géométrique définie par  $u_n = \alpha u_{n-1}$ . Donner le terme général de la suite en fonction de  $n$ ,  $\alpha$  et  $u_0$ .

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.2 Ch3-Exercice2

Soit une suite  $u_n$  et soit la suite  $v_n = u_n - l$ , où  $l$  est un réel donné. Montrer, en utilisant la définition de la convergence que

$$((u_n) \text{ tend vers } l) \Leftrightarrow ((v_n) \text{ tend vers } 0)$$

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.3 Ch3-Exercice3

Quelle est la limite d'une suite constante? (On fera la démonstration en utilisant la définition).

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.4 Ch3-Exercice4

Utiliser la définition de la convergence pour montrer que la suite  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $n > 0$ , tend vers 0.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.5 Ch3-Exercice5

écrire, à l'aide de quantificateurs, la définition de la divergence d'une suite  $u_n$ . Montrer alors que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  est divergente.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.6 Ch3-Exercice6

Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

En déduire que

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow (u_{\varphi(n)}) \text{ converge vers } \ell.$$

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.7 Ch3-Exercice7

En utilisant le lien entre les suites convergentes et les suites bornées, montrer qu'une suite qui tend vers l'infini est divergente.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.8 Ch3-Exercice8

Montrer que la suite  $u_n = \frac{n}{n+1}$  est croissante et majorée. Est-elle convergente?

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.9 Ch3-Exercice9

1. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites croissantes. Montrer que la suite  $(u_n + v_n)$  est aussi croissante.
2. Soit  $(u_n)$  une suite croissante. Montrer que la suite  $(-u_n)$  est décroissante.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.10 Ch3-Exercice10

Soit  $(u_n)$  une suite croissante. Montrer que si  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ , alors quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq l$ .

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.11 Ch3-Exercice11

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites convergentes dont on notera  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  les limites respectives. En utilisant la définition de la convergence, montrer que la suite  $(u_n + v_n)$  converge vers  $\hat{u} + \hat{v}$  (on pensera à utiliser l'inégalité triangulaire :  $|u_n + v_n - \hat{u} - \hat{v}| \leq |u_n - \hat{u}| + |v_n - \hat{v}|$ ).

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.12 Ch3-Exercice12

Soit  $(v_n)$  une suite convergeant vers 0 et soit la suite  $(u_n)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  tend vers 0.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.13 Ch3-Exercice13

Soit  $(v_n)$  une suite convergeant vers 0 et soit  $(u_n)$  une suite bornée, montrer que la suite  $(u_n v_n)$  tend vers 0.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.14 Ch3-Exercice14

1. Donner des exemples de suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  qui tendent respectivement vers  $+\infty$  et  $-\infty$  telles que :
  - (a)  $(u_n + v_n)$  tende vers  $-\infty$ .
  - (b)  $(u_n + v_n)$  tende vers  $+\infty$ .
  - (c)  $(u_n + v_n)$  converge vers  $l$ .
2. Donner des exemples de suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  qui tendent respectivement vers  $+\infty$  et 0 telles que :
  - (a)  $(u_n v_n)$  tende vers  $+\infty$ .
  - (b)  $(u_n v_n)$  converge vers 0.
  - (c)  $(u_n v_n)$  converge vers  $l \neq 0$ .

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.15 Ch3-Exercice15

Soit  $(u_n)$  une suite convergente de limite  $l$  strictement positive.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que, pour tout  $n$  supérieur à  $N$ , on ait  $u_n > 0$ .
2. Si on définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = 1/u_n$ , pour  $n$  supérieur au  $N$  précédent, les  $N$  premiers termes de la suite étant quelconques, quelle est la limite de la suite  $(v_n)$ ?
3. Peut-on faire le même raisonnement si  $l < 0$ ?

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.16 Ch3-Exercice16

Déterminer un équivalent des suites  $(u_n)$  définies pour  $n \geq 1$  par

$$(i) u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}, \quad (ii) u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \quad (iii) u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+n}$$

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.17 Ch3-Exercice17

Montrer, à l'aide de contre-exemples, que les affirmations suivantes sont fausses.

1. Étant donnée une fonction  $f$ , si  $u_n \sim v_n$  alors  $f(u_n) \sim f(v_n)$ .
2. Si  $u_n \sim v_n$  alors  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .
3. Si  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  alors  $u_n \sim v_n$ .

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.18 Ch3-Exercice18

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite d'entiers compris entre 0 et 9. On associe à  $(a_n)_{n \geq 1}$ , les suites de nombres rationnels suivantes :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}, \quad \beta_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

Montrer que ces deux suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont adjacentes.

[Elles définissent un réel  $x$ , leur limite commune, dont  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont les **approximations décimales à  $10^{-n}$  près**, respectivement par défaut et par excès.]

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.19 Ch3-Exercice19

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \{(m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\} \Rightarrow (|u_m - u_n| \leq \varepsilon),$$

est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \{(n \geq N) \text{ et } (p \in \mathbb{N})\} \Rightarrow (|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon).$$

(Une des deux implications est claire, pour l'autre il faut voir que si deux entiers sont quelconques, l'un est nécessairement supérieur ou égal à l'autre).

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.20 Ch3-Exercice20

Montrer, en utilisant les suites de Cauchy, que la suite  $(u_n)$ , définie par  $u_n = (-1)^n$  est divergente.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.21 Ch3-Exercice21

Montrer que la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = K u_n, n \geq 0. \end{cases}$$

où  $0 \leq K < 1$  est une suite convergente. Puis montrer que sa limite est nulle.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.22 Ch3-Exercice22

étudier, selon le nombre réel  $\alpha$ , la suite récurrente *linéaire* d'ordre 1 définie par

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné,} \\ u_{n+1} = \alpha u_n, n \geq 0. \end{cases}$$

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.23 Ch3-Exercice23

Soit  $f$  une fonction réelle telle que

$$(L) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

où  $0 < K < 1$  est donné. Montrer que si l'équation  $u = f(u)$  a une solution, celle-ci est unique.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.24 Ch3-Exercice24

Soit la série  $(u_n)$ , définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = \frac{1}{n}, \end{cases} \text{ pour } (n > 0).$$

Notons  $(S_n)$ , la suite des sommes partielles associées.

1. Montrer que  $S_n = S_{n-1} + 1/n$ ,  $S_0 = 0$ .
2. Démontrer, suivant un raisonnement par l'absurde, que la suite  $(S_n)$  diverge.
3. Est-ce que la suite  $(u_n)$  tend vers 0? Ce résultat permet-il de conclure que la série  $(u_n)$  converge?

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.25 Ch3-Exercice25

Les séries de termes généraux définis à l'exercice A.1.16 sont-elles convergentes?

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## A.2 Exercices de TD

A.2.1	TD3-Exercice1	77
A.2.2	TD3-Exercice2	78
A.2.3	TD3-Exercice3	79
A.2.4	TD3-Exercice4	81
A.2.5	TD3-Exercice5	82
A.2.6	TD3-Exercice6	83
A.2.7	TD3-Exercice7	84
A.2.8	TD3-Exercice8	85
A.2.9	TD3-Exercice9	87
A.2.10	TD3-Exercice10	88
A.2.11	TD3-Exercice11	91
A.2.12	TD3-Exercice12	92
A.2.13	TD3-Exercice13	93
A.2.14	TD3-Exercice14	94
A.2.15	TD3-Exercice15	96
A.2.16	TD3-Exercice16	97
A.2.17	TD3-Exercice17	98
A.2.18	TD3-Exercice18	99
A.2.19	TD3-Exercice19	100

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Exercice A.2.1** TD3-Exercice1

Montrer en utilisant la définition que  $u_n = \frac{n-1}{2n}$  admet  $\frac{1}{2}$  comme limite.

[Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.2 TD3-Exercice2

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles.

1. On suppose que  $(u_n)$  converge,  $(v_n)$  diverge, est-ce que  $(u_n + v_n)$  converge?
2. On suppose que  $(u_n)$  diverge,  $(v_n)$  diverge, est-ce que  $(u_n + v_n)$  converge?

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.3** TD3-Exercice3

Dans chacuns des cas suivants , la suite  $(u_n)$  est-elle convergente? Si oui quelle est sa limite?  
On ne demande pas d'utiliser la définition, mais d'utiliser précisément les résultats démontrés dans le cours.

1.

$$i) \quad u_n = \frac{n^2 - 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_*, \quad ii) \quad u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - 1} - 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_*,$$

2.

$$iii) \quad u_n = \frac{e^{\sqrt{n^2+1}}}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad iv) \quad u_n = \sum_{k=0}^n (k+1), \quad n \in \mathbb{N},$$

3.

$$v) \quad u_n = n \sin \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_*, \quad vi) \quad u_n = \frac{1}{n} \sin n, \quad n \in \mathbb{N}_*,$$

4.

$$vii) \quad u_n = n^2 \sin \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_* \quad viii) \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_*,$$

5.

$$ix) \quad u_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad x) \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{k+2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

**Réponses :** *i)* tend vers  $+\infty$ , *ii)* converge vers  $\sqrt{2}$ , *iii)* converge vers 1,  
*iv)* tend vers  $+\infty$ , *v)* converge vers 1, *vi)* converge vers 0,  
*vii)* tend vers  $+\infty$ , *viii)* converge vers 0, *ix)* converge vers 2, *x)* converge vers  $\frac{1}{3}$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)  
Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 4 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 5 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

## Exercice A.2.3

TD3-Exercice3

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.4 TD3-Exercice4

Etudier la convergence des suites suivantes et donner leur limite quand elle existe.

$$i) \quad u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$ii) \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$iii) \quad u_n = \ln(n+1) - \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$iv) \quad u_n = \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq a < b,$$

$$v) \quad u_n = \sum_{k=0}^n k, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$vi) \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{5^k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$vii) \quad u_n = \frac{n!}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$viii) \quad u_n = \frac{2^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$ix) \quad u_n = \frac{2^n}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.5 TD3-Exercice5

Soit la suite  $(u_n)$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0, \\ u_1 = 0, \\ u_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{lorsque } n \text{ est pair, strictement positif,} \\ u_n = 1 - \frac{1}{n-2}, \quad \text{lorsque } n \text{ est impair, strictement plus grand que 1,} \end{array} \right.$$

1. Calculer les 6 premiers termes.
2. Calculer  $\sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$  (faire une démonstration rigoureuse).
3. Donner la limite de la suite  $(u_n)$  (faire une démonstration rigoureuse).
4. La suite est-elle croissante à partir d'un certain rang?

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.6 TD3-Exercice6

$u_0, a, b$  sont des réels donnés, on définit :  $u_{n+1} = au_n + b, n \in \mathbb{N}$ .

1. On choisit  $b = 1$  et successivement  $a = \frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2}, a = 2, a = -2$ . Dans chacun de ces cas, étudier graphiquement si la suite est croissante, décroissante, convergente (si oui, vers quelle limite?)
2. (a) Etudier le cas  $a = 1$ .  
(b) Dans le cas  $a \neq 1, b$  quelconque, lorsque la suite converge, que vaut sa limite  $l$ ?  
(c) Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  (on pourra étudier la suite de terme général  $v_n = u_n - l$ )

**Réponse** : la suite converge si et seulement si

$$\left( (a = 1 \text{ et } b = 0) \text{ ou } \left( a \neq 1 \text{ et } u_0 = \frac{b}{1-a} \right) \text{ ou } (|a| < 1) \right).$$

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2a [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2b [Aide 1](#)

Question 2c [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#) [Aide 6](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.7 TD3-Exercice7

Lorsque l'on veut étudier une suite récurrente définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on étudie les variations de  $f$ , le signe de  $f(x) - x$ , on détermine, s'il(s) existe(nt), le(s) point(s) fixe(s) de  $f$ .

1. On définit  $f(x) = \frac{2x^3 + 2x - 1}{3}$ ,  $u_0$  étant donné, on définit la suite  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$ . **Réponse** : la suite diverge sauf si  $u_0 = 1$ .

2. On définit  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$ ,  $(u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N})$ .

(a) Montrer que  $u_n$  est défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Etudier graphiquement la suite  $(u_n)$ .

(c) Démontrer les résultats précédents.

**Réponse** :  $(u_n)$  converge vers 1.

3. On définit  $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N})$ .

(a) Etudier graphiquement la suite  $(u_n)$ .

(b) Démontrer les résultats précédents dans le cas  $u_0 \geq 0$ .

(c) Etudier le cas  $u_0 < 0$ .

**Réponse** : la suite converge pour  $u_0 \in [-1, +1]$ , elle diverge sinon.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.8 TD3-Exercice8

1. On définit la suite de terme général

$$u_0 > 1, u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}, n \in \mathbb{N}.$$

- Montrer que  $u_n$  est défini pour tout entier  $n$ .
  - On note  $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ . Etudier les variations de  $f$ , le signe de  $f(x) - x$  et montrer que  $f$  admet un point fixe  $\alpha$  appartenant à  $]1, +\infty[$ .
  - Etudier graphiquement la suite  $(u_n)$  ( $u_0 < \alpha$ ,  $u_0 > \alpha$ ).
  - Démontrer directement les résultats déduits en (c).
2. Mêmes questions pour la suite

$$u_0 \geq -9, u_{n+1} = \sqrt{9 + u_n}, n \in \mathbb{N},$$

en adaptant la définition de la fonction  $f$  et l'intervalle sur lequel vous l'étudiez.

3. Mêmes questions pour la suite

$$u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n), n \in \mathbb{N}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Question 1a [Aide 1](#)  
Question 1b [Aide 1](#)  
Question 1c [Aide 1](#)  
Question 1d [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)  
Question 2 [Aide 1](#)  
Question 3 [Aide 1](#)

## Exercice A.2.8

TD3-Exercice8

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.9 TD3-Exercice9

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ , où  $a \in \mathbb{R}_*^+$ .

1. Montrer que si  $x > \sqrt{a}$  alors  $\sqrt{a} < f(x) < x$ .
2. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_1 > \sqrt{a}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ . Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.
3. On pose  $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{a}$ . Montrer que  $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2u_n} \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$ .
4. On pose  $b = 2\sqrt{a}$ . Montrer que  $\varepsilon_{n+1} \leq b \left( \frac{\varepsilon_1}{b} \right)^{2^n}$ .
5. **Application numérique** On prend  $a = 3$ ,  $u_1 = 2$ , vérifier que  $\frac{1}{10} > \frac{2 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$  et majorer  $\varepsilon_5$ .  
Conclure.

- Question 1 [Aide 1](#)  
Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 3 [Aide 1](#)  
Question 4 [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.10** TD3-Exercice10

$a, b, c, d$  étant quatre nombres réels, on définit quand c'est possible,

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

1. Si la suite  $(u_n)$  est définie pour tout  $n$  et converge vers  $l$ , montrer que  $l$  vérifie une équation du second degré  $(E)$  que l'on précisera.
2. Soit  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n - 9}{u_n + 1}$ . On suppose que  $u_n$  est défini pour tout  $n$ , est-ce que la suite  $(u_n)$  est convergente?
3. Soit la suite de terme général  $u_n$  défini par

$$u_0 \text{ "judicieusement choisi"}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}, n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Montrer que l'équation  $(E)$  admet 2 racines  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on explicitera.
- (b) Montrer qu'il existe un réel  $\lambda$ , ne dépendant ni de  $n$  ni de  $u_0$ , tel que l'on ait

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \lambda \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.$$

- (c) En déduire une relation entre  $u_n$  et  $n$ .
- (d) Quelle condition imposer alors sur  $u_0$  pour que la suite  $(u_n)$  soit définie pour tout entier naturel  $n$ ?

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

(e) On suppose que  $u_0$  vérifie la condition précédente. Montrer alors que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$  que l'on explicitera.

4. Mêmes questions avec

$$u_0 \text{ "judicieusement choisi"}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}, n \in \mathbb{N}.$$

5. Mêmes questions avec

$$u_0 \text{ "judicieusement choisi"}, u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{u_n + 5}, n \in \mathbb{N}.$$

6. On définit la suite  $(u_n)$  par

$$u_0 \text{ "judicieusement choisi"}, u_{n+1} = \frac{4 + 4u_n}{8 - u_n}, n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que l'équation  $(E)$  admet une racine double  $\alpha$ .

Montrer que la suite :  $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - \alpha}$  est une suite arithmétique.

En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice A.2.10

TD3-Exercice10

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 3a [Aide 1](#)  
Question 3b [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 3c [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 3d [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 3e [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 4 [Aide 1](#)  
Question 5 [Aide 1](#)  
Question 6 [Aide 1](#)

## Exercice A.2.10

TD3-Exercice10

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.11 TD3-Exercice11

Soit  $a \in [0, 1]$ , on considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 \in ]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2), n \in \mathbb{N}.$$

1. On note  $f(x) = x + \frac{1}{2}(a - x^2)$ . Etudier les variations de  $f$ , le signe de  $f(x) - x$  et montrer que  $f$  admet deux points fixes.
2. Etudier graphiquement la suite  $(u_n)$ .
3. Démontrer les résultats pressentis graphiquement.

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.12** TD3-Exercice12

1. On considère les suites de termes généraux définis pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad u_n = v_n + \frac{1}{nn!}.$$

Montrer que ces 2 suites sont adjacentes. On peut montrer, par l'absurde, que leur limite commune ne peut pas être un nombre rationnel (facultatif).

2. Montrer que les suites de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  définis par

$$u_0 > 0, v_0 > 0, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, n \in \mathbb{N}$$

sont adjacentes. Trouver leur limite en étudiant  $w_n = u_n v_n$ .

3. Montrer que les suites de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  définis par

$$u_0 > 0, v_0 > 0, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, n \in \mathbb{N}$$

sont adjacentes. [Leur limite, que l'on ne demande pas de calculer, est une fonction de  $u_0$  et  $v_0$  appelée "moyenne géométrico-arithmétique"].

- Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)  
Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)  
Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.13 TD3-Exercice13

On suppose  $0 < b < a$ , montrer que les suites définies par

$$u_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b}, \quad v_{n+1} = \frac{bu_n + av_n}{a+b}$$

sont adjacentes.

Déterminer leur limite.

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#) [Aide 6](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.14** TD3-Exercice14

1. (a) i. Chercher toutes les suites géométriques qui vérifient la relation

$$2u_n = 5u_{n-1} - 2u_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \quad (\text{A.2.1})$$

- ii. Montrer que si deux suites quelconques de terme général  $v_n$  et  $v'_n$  vérifient la relation (A.2.1), alors la suite  $w_n = v_n + v'_n$  vérifie également cette relation.

- (b) Utiliser la question précédente pour trouver une suite  $(u_n)$  qui vérifie les conditions :

$$u_0 = 6, u_1 = 9, 2u_n = 5u_{n-1} - 2u_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (\text{A.2.2})$$

- (c) i. Montrer que la suite  $(u_n)$  ainsi définie est la seule qui vérifie les conditions (A.2.2).  
ii. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente? (**Réponse** : non).

2. Mêmes questions pour la suite définie par

$$u_0, u_1 \text{ deux réels donnés, } u_n = \frac{u_{n-1} + 2u_{n-2}}{3}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

**Réponse** : la suite converge vers  $\frac{2}{5}u_0 + \frac{3}{5}u_1$

3. (a) i. Chercher toutes les suites géométriques qui vérifient la relation

$$u_n = -2u_{n-1} - u_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \quad (\text{A.2.3})$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

ii. Montrer que si la suite géométrique de terme général  $v_n$  vérifie la relation (A.2.3), alors la suite  $v'_n = nv_n$  vérifie également cette relation.

(b) Utiliser la question précédente pour trouver la suite  $u_n$  qui vérifie les conditions :

$$u_0, u_1 \text{ réels donnés, } u_n = -2u_{n-1} - u_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (\text{A.2.4})$$

(c) La suite  $(u_n)$  est-elle convergente? **Réponse** : non sauf si  $u_0 = u_1 = 0$

Question 1(a)i [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 1(a)ii [Aide 1](#)

Question 1b [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 1(c)i [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

Question 1(c)ii [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#)

Question 3(a)i [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3(a)ii [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3b [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

Question 3c [Aide 1](#)

## Exercice A.2.14

TD3-Exercice14

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.15** TD3-Exercice15

1. Soit  $a$  un nombre réel, soit  $(u_n)$  une suite qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}_* |u_n - a| \leq \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $a$ .

2. Soit  $A$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ , on suppose que  $A$  admet une borne supérieure  $a$ . Montrer qu'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ .
3. Soit  $A$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ , soit  $a$  un majorant de  $A$ . On suppose qu'il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $A$  qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ . Montrer que  $a$  est borne supérieure de  $A$ .
4. Énoncer des résultats similaires dans le cas de la borne inférieure.  
Utiliser ces résultats pour déterminer la borne inférieure de

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_* \right\}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.16 TD3-Exercice16

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite et  $S_n = \sum_{k \geq 0}^n u_k$  la série numérique associée.

On pose  $v_n = \max(u_n, 0)$  et  $w_n = \min(u_n, 0)$ , puis

$$S_n^+ = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \quad \text{et} \quad S_n^- = w_0 + w_1 + \cdots + w_n.$$

1. Montrer que les suites  $(S_n^+)$  et  $(S_n^-)$  sont monotones.
2. On sait que  $u_n = v_n + w_n$ . On suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  converge. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge également. (*Indication : montrer que  $(S_n^+)$  et  $(S_n^-)$  sont bornées.*)
3. Montrons que la réciproque est fautive avec  $(u_n = \frac{(-1)^n}{n})_{n \geq 1}$ . (*Indication : montrer que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.*)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.17 TD3-Exercice17

À l'aide des règles de Riemann, étudier la convergence des séries  $(\sum_{k=1}^n u_k)$  de termes généraux suivants :

$$(i) u_n = \frac{(2n+1)^4}{(3n^2+7)^3}, \quad (ii) u_n = \frac{1}{n \cos^2 n}, \quad (iii) u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$(iv) u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad (v) u_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.18** TD3-Exercice18

1. Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de termes réels strictement positifs tels que  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Montrer que

$$\left( \sum_{k=1}^n v_k \right) \text{ converge} \Rightarrow \left( \sum_{k=1}^n u_k \right) \text{ converge.}$$

2. Montrer que les séries suivantes sont convergentes

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2 \sqrt{n}}, \quad (ii) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}, \quad (iii) \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.19 TD3-Exercice19

La suite de terme général  $u_n = \frac{|\sin(1)|}{2} + \frac{|\sin(2)|}{2^2} + \dots + \frac{|\sin(n)|}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est-elle convergente? (Etudier la convergence de cette suite permet d'étudier la convergence de la série de terme général  $\frac{\sin(n)}{2^n}$ . En effet on vient de montrer que cette série est absolument convergente et donc convergente comme il l'est dit dans le document [C.1.6](#).

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe B

## Exemples

B.1 Exemples du chapitre 3 . . . . . 102

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## B.1 Exemples du chapitre 3

B.1.1	Méthode des rectangles . . . . .	103
B.1.2	Méthode des trapèzes . . . . .	104
B.1.3	Approximation par une série . . . . .	105
B.1.4	Calcul de la limite par comparaison . . . . .	107
B.1.5	Algorithme de dichotomie, suites adjacentes . . . . .	109
B.1.6	Exemple de suite de Cauchy . . . . .	111
B.1.7	Divergence de la série harmonique . . . . .	113
B.1.8	Exemple de suite récurrente . . . . .	115
B.1.9	Convergence de la série de Riemann . . . . .	117

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Exemple B.1.1 Méthode des rectangles

Nous voulons calculer une valeur approchée de l'intégrale  $w = \int_0^1 e^{x^2} dx$  par la **méthode des rectangles**. Notons  $f$  la fonction dont nous désirons calculer l'intégrale sur  $(0, 1)$ . Définissons, pour  $n \geq 1$ ,  $h = 1/n$  et, pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $x_k = kh$ . Construisons enfin la somme :

$$u_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

Nous obtenons ainsi une suite :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_2 &= 1.14201, \\ u_3 &= 1.22571, \\ u_4 &= 1.27589, \\ u_5 &= 1.30882, \dots, \end{aligned}$$

qui converge lentement vers la valeur 'exacte' de  $w$ , soit 1.462 651 7 (valeur par défaut à  $10^{-8}$  près). Nous obtenons notamment :

$$\begin{aligned} u_{100} &= 1.4541056, \\ u_{1000} &= 1.4617931, \\ u_{10000} &= 1.4625658, \\ u_{100000} &= 1.462642. \end{aligned}$$

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exemple B.1.2 Méthode des trapèzes

Nous voulons calculer une valeur approchée de l'intégrale  $w = \int_0^1 e^{x^2} dx$  par la **méthode des trapèzes**. Elle consiste à construire la somme :

$$v_n = h \left[ \frac{1}{2} f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2} f(1) \right].$$

L'application de cette méthode donne :

$$v_1 = 1.8591409$$

$$v_2 = 1.5715832$$

$$v_3 = 1.5120945$$

$$v_4 = 1.4906789$$

$$v_5 = 1.4806546$$

...

$$v_{10} = 1.4671747$$

$$v_{100} = 1.4626970$$

$$v_{1000} = 1.4626522$$

$$v_{10000} = 1.4626518$$

$$v_{100000} = 1.4626517.$$

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.3 Approximation par une série

Nous voulons toujours calculer une valeur approchée de l'intégrale  $w = \int_0^1 e^{x^2} dx$ . Nous verrons plus tard dans le cours qu'il est possible d'approcher la fonction  $e^{x^2}$  par un polynôme de la forme suivante :

$$P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

l'approximation étant d'autant meilleure que  $n$  est grand. Il est donc naturel de songer à approcher l'intégrale sur  $[0, 1]$  de  $e^{x^2}$  par :

$$w_n = \int_0^1 P_n(x) dx = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5(2!)} + \dots + \frac{1}{(2n+1)n!}. \quad (\text{B.1.1})$$

On démontre effectivement que la suite  $(w_n)$  converge vers cette intégrale et le calcul numérique de  $w_n$  donne :

$$\begin{aligned} w_1 &= 1.3333333 \\ w_2 &= 1.4333333 \\ w_3 &= 1.4571429 \\ w_4 &= 1.4617725 \\ w_5 &= 1.4625301 \\ w_6 &= 1.4626369 \\ w_7 &= 1.4626501 \\ w_8 &= 1.4626516 \\ w_9 &= 1.4626517 \dots \end{aligned}$$

Cet exemple montre bien que toutes les méthodes numériques n'ont pas la même efficacité et qu'une formule telle que (B.1.1) se révèle très intéressante du point de vue numérique.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

[Retour au cours](#)

**Exemple B.1.3**  
Approximation  
par une série

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.4 Calcul de la limite par comparaison

Nous allons nous intéresser ici à l'étude de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \quad u_n = n^{1/n}.$$

Tout d'abord, rappelons que la fonction puissance  $a^x$ , où  $a$  est un réel positif, est définie par  $a^x = e^{x \ln a}$ . Il vient donc ici :

$$u_n = e^{\frac{\ln n}{n}}.$$

Comme le quotient  $(\ln n)/n$  est positif, dès que  $n \geq 1$ , on arrive à  $u_n \geq 1$ . Nous reviendrons sur la définition et les propriétés de la fonction puissance au chapitre suivant.

Les résultats sur la comparaison des suites, nous permettent maintenant d'affirmer que la limite  $\hat{u}$  de la suite  $(u_n)$ , vérifie, si elle existe,  $\hat{u} \geq 1$ .

Montrons que  $\hat{u} = 1$ . Posons  $v_n = u_n - 1$ , nous avons alors :

$$0 \leq v_n = n^{1/n} - 1.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} n &= (u_n)^n = (1 + v_n)^n \\ &= 1 + C_n^1 v_n + C_n^2 (v_n)^2 + \cdots + C_n^{n-1} (v_n)^{n-1} + (v_n)^n > C_n^2 (v_n)^2 = \frac{n(n-1)}{2} (v_n)^2, \end{aligned}$$

d'où

$$(v_n)^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

et donc, puisque la suite du membre de droite tend vers 0,

$$(v_n)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

et donc :

$$v_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'où

$$n^{1/n} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

La vérification de l'implication :

$$(v_n^2 \rightarrow 0) \Rightarrow (v_n \rightarrow 0),$$

est à faire en exercice.

[Retour au cours](#)

### Exemple B.1.4

Calcul de la  
limite par  
comparaison

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.5 Algorithme de dichotomie, suites adjacentes

Pour calculer le nombre réel  $\sqrt{a}$  ( $a > 0$ ), on peut utiliser une **méthode de dichotomie** appliquée à la recherche de la racine positive de l'équation  $f(x) = 0$  avec  $f(x) = x^2 - a$ . Pour cela on part de deux valeurs  $u_0$  et  $v_0$ ,  $u_0 < v_0$ , donnant des valeurs de signes différents à  $f(x)$ , par exemple :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = a + 1. \quad (\text{Pourquoi choisit-on } a + 1 ?)$$

On obtient alors  $f(u_0) = -a < 0$  et  $f(v_0) = (a+1)^2 - a = a^2 + a + 1 > 0$ . Ces deux valeurs constituent donc un **encadrement initial** de la racine. évidemment, plus cet encadrement est précis plus la méthode donnera rapidement un résultat précis. On suppose que l'on a défini  $u_n$  et  $v_n$ , puis l'on pose :

$$w = \frac{u_n + v_n}{2},$$

alors on définit :

$$u_{n+1} = \begin{cases} w, & \text{si } f(w) < 0, \\ u_n, & \text{sinon,} \end{cases} \quad v_{n+1} = \begin{cases} w, & \text{si } f(w) \geq 0, \\ v_n, & \text{sinon.} \end{cases}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Exemple avec  $a = 2$  :

$u_0 = 0$	$v_0 = 3$
$u_1 = 0$	$v_1 = 1.5$
$u_2 = 0.75$	$v_2 = 1.5$
$u_3 = 1.125$	$v_3 = 1.5$
$u_4 = 1.3125$	$v_4 = 1.5$
$u_5 = 1.40625$	$v_5 = 1.5$
$u_6 = 1.40625$	$v_6 = 1.453125$
$u_7 = 1.40625$	$v_7 = 1.429687\dots$
$u_8 = 1.40625$	$v_8 = 1.417968\dots$
$u_9 = 1.41210\dots$	$v_9 = 1.417968\dots$

On construit ainsi deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  adjacentes. On peut remarquer que l'intervalle d'incertitude est de la forme  $\delta 2^{-n}$ , où  $\delta = v_0 - u_0$  est l'intervalle d'incertitude initial. Ainsi, si l'on veut diviser l'incertitude initiale par  $10^{-k}$  il faut de l'ordre de  $k \frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 3.3k$  itérations.

[Retour au cours](#)

### Exemple B.1.5

Algorithme de  
dichotomie,  
suites  
adjacentes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.6 Exemple de suite de Cauchy

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par récurrence ci-dessous :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n^2}, \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Nous avons ainsi :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{4}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \dots$$

Montrons, par simple utilisation du critère de Cauchy, que cette suite est convergente (le calcul de la limite  $\pi^2/6$ , sortant du cadre de ce cours). En effet, pour  $p \geq 1$ , nous avons :

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{1}{(n+p-1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

et grâce à l'inégalité :

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

nous pouvons en déduire :

$$\begin{aligned} u_{n+p} - u_n &\leq \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots \\ &\quad + \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}, \end{aligned} \tag{B.1.2}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

d'où la majoration :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  donné et soit un entier  $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , alors pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \geq N$  nous avons :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite est une suite de Cauchy.

[Retour au cours](#)

**Exemple B.1.6**  
Exemple de  
suite de Cauchy

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.7 Divergence de la série harmonique

Nous avons montré dans le paragraphe [Cauchy \(suites de\)](#) que la suite définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas une suite de Cauchy et par conséquent qu'elle n'est pas convergente. Nous allons démontrer à nouveau cette non convergence en comparant  $S_n$  à  $\ln n$ . Cette étude va non seulement redonner la non convergence de la série harmonique, mais elle va aussi donner un minorant de  $S_n$ .

Soit donc la fonction  $\ln x$  définie sur  $]0, +\infty[$ . Nous pouvons écrire :

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^n = \ln n.$$

Nous allons maintenant calculer une approximation de cette intégrale par la **méthode des rectangles**. Il s'agit d'une méthode de calcul approchée d'intégrales. Ici nous allons calculer une approximation de l'aire sous-tendue par la courbe  $y = 1/x$  entre les points d'abscisse  $x = 1$  et  $x = n$ .

Nous allons remplacer cette aire par la somme des aires des rectangles de largeur 1, de hauteur  $1, 1/2, \dots, 1/(n-1)$ , construits entre les points  $1$  et  $2, 2$  et  $3, \dots, n-1$  et  $n$  de l'axe des  $x$  respectivement (voir la figure [B.1.1](#)). La somme des aires de ces rectangles est égale à  $S_{n-1}$  et nous avons donc :

$$\ln n \leq S_{n-1}.$$

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exemple B.1.7**  
Divergence de la  
série  
harmonique

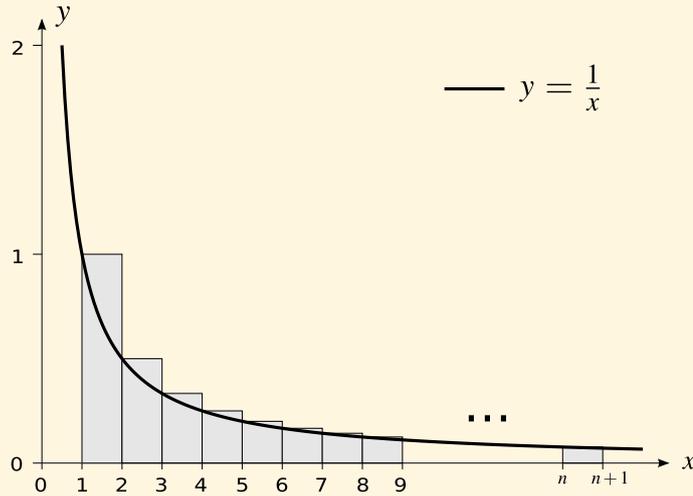


FIGURE B.1.1 – Minoration de la somme de la série harmonique

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.8 Exemple de suite récurrente

Soit  $a$  un nombre strictement positif, considérons la suite récurrente  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

La fonction  $f$  est définie sur  $\{x > 0\}$  par  $f(x) = (x + a/x)/2$  et nous avons alors :

— pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \geq \sqrt{a}$ . En effet, de la définition de la suite, nous déduisons :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a} \right) = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{a})^2 \geq 0,$$

— sur  $\{x \geq \sqrt{a}\}$ , la fonction  $f$  vérifie la condition (L) avec  $K = 1/2$ . En effet, comme

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2} (x - y) \left( 1 - \frac{a}{xy} \right),$$

nous voyons que si  $x$  et  $y$  sont supérieurs ou égaux à  $\sqrt{a}$ , nous avons

$$0 \leq 1 - \frac{a}{xy} < 1 \text{ et par suite } |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

D'où la convergence de la suite. En utilisant l'unicité de la limite d'une suite convergente et en passant à la limite dans l'équation  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ , nous montrons alors que cette limite est égale à  $\sqrt{a}$  (et non à  $-\sqrt{a}$ , puisque, quel que soit  $n$ ,  $u_n$  est strictement positif).

Ajoutons que l'un des algorithmes les plus efficaces (i.e. simples et rapidement convergents) pour calculer  $\sqrt{a}$  consiste justement à calculer cette suite.

Cet exemple fournit en même temps un exemple de suite de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$ , non convergente dans  $\mathbb{Q}$  : il suffit de prendre par exemple  $a = 2$ , et  $u_0 = 1$ . On voit sans peine que tous les

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

termes de la suite sont rationnels. Elle est de Cauchy car elle converge dans  $\mathbb{R}$ , mais n'est pas convergente dans  $\mathbb{Q}$  car si cette convergence a lieu, comme  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , c'est aussi une convergence dans  $\mathbb{R}$ , donc la limite serait  $\sqrt{2}$ , qui n'est pas rationnel.

[Retour au cours](#)

### Exemple B.1.8

Exemple de suite récurrente

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.9 Convergence de la série de Riemann

Nous avons montré dans l'exemple B.1.6 que la suite définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

est une suite de Cauchy et par conséquent qu'elle est convergente. Nous allons démontrer à nouveau cette convergence en comparant  $S_n$  à  $2 - 1/n$ . Cette étude va non seulement redonner la convergence de la série de Riemann, mais elle va aussi donner un majorant de  $S_n$ .

Soit donc la fonction  $1/x$  définie sur  $]0, +\infty[$ . Nous pouvons écrire :

$$\int_1^n \frac{dx}{x^2} = - \left[ \frac{1}{x} \right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Utilisons à nouveau la méthode des rectangles mais de manière cette fois-ci à minorer l'aire sous-tendue par la courbe  $y = 1/x^2$ . Pour ce faire, nous utiliserons les rectangles de largeur 1 construits entre les points 1 et 2, 2 et 3, ...,  $n-1$  et  $n$  de l'axe des  $x$  respectivement (voir la figure B.1.2). Cette fois-ci cependant nous les prendrons de hauteur  $1/2^2, 1/3^2, \dots, 1/n^2$  respectivement. Nous obtenons ainsi :

$$S_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1.$$

Ceci montre que la suite  $(S_n)$  est majorée par 2. Comme elle est par ailleurs clairement croissante, il en résulte bien qu'elle est convergente.

Rappelons nous que la limite de cette série est  $\pi^2/6$  (démonstration sortant du cadre de ce cours). On vérifie bien que cette limite est inférieure à 2.

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.9

Convergence de  
la série de  
Riemann

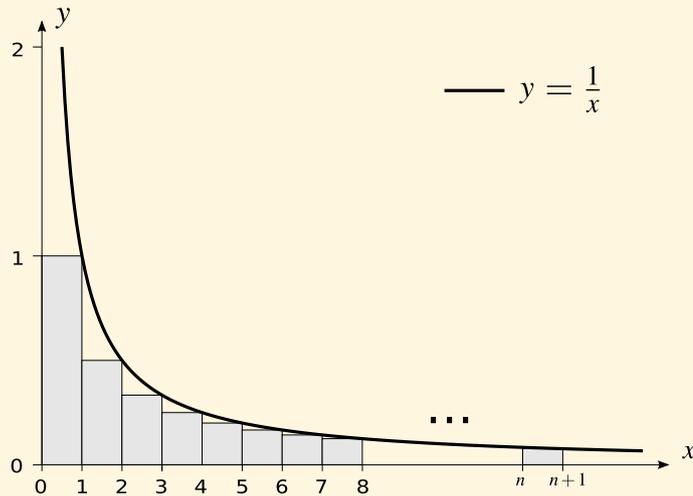


FIGURE B.1.2 – Majoration de la somme de la série de Riemann

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe C

## Documents

C.1 Documents du chapitre 3 . . . . . 120

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## C.1 Documents du chapitre 3

C.1.1	Remarques sur les suites de Cauchy . . . . .	121
C.1.2	Convergence des suites de Cauchy . . . . .	122
C.1.3	Convergence des suites de Cauchy (deuxième démonstration) . . .	125
C.1.4	Convergence d'une suite récurrente . . . . .	127
C.1.5	Sommes partielles d'une série géométrique . . . . .	129
C.1.6	Série absolument convergente . . . . .	130

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Document C.1.1 Remarques sur les suites de Cauchy

Pour démontrer qu'une suite de Cauchy est convergente, la difficulté essentielle provient du fait qu'il faut établir que la suite admet une limite sans pour autant connaître cette limite!

En fait le résultat énoncé ci-dessus est intrinsèquement lié à la structure de  $\mathbb{R}$ . En effet,

1. Il est faux dans  $\mathbb{Q}$  (voir l'exemple sur les suites récurrentes [B.1.8](#)),
2. On le démontre dans  $\mathbb{R}$  à partir de l'axiome de la borne supérieure (voir chapitre précédent), qui est une propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ . Cette démonstration est l'objet du document [C.1.2](#).
3. Inversement d'ailleurs, on peut construire  $\mathbb{R}$  en utilisant les suites de Cauchy de  $\mathbb{Q}$ . On démontre alors l'axiome (qui n'en est plus un, quand on a choisi de faire cette construction) de la borne supérieure.

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document C.1.2 Convergence des suites de Cauchy

Nous avons le

**Théorème C.1.1.** *Toute suite de Cauchy est convergente dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration* - Cette propriété résulte directement comme nous allons le voir de l'axiome de la borne supérieure. Soit donc  $(u_n)$  une suite de Cauchy.

Montrons tout d'abord que  $(u_n)$  est bornée, en effet par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \{(m \geq N_1) \text{ et } (n \geq N_1)\} \Rightarrow (|u_m - u_n| \leq \varepsilon). \end{array} \right.$$

Choisissons  $m = N_1$ , il vient alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1) \Rightarrow (|u_{N_1} - u_n| \leq \varepsilon),$$

ce qui montre bien que la suite  $(u_n)$  est bornée par

$$M = \max(|u_1|, \dots, |u_{N_1-1}|, |u_{N_1} - \varepsilon|, |u_{N_1} + \varepsilon|).$$

On définit une nouvelle suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n = \sup_{i \geq n} u_i,$$

$L_n$  existe bien puisque l'ensemble  $A_n = \{u_i, i \geq n\}$  est majoré (par  $M$ ). D'autre part les ensembles  $A_n$  sont minorés par  $-M$ , donc  $\forall n, L_n \geq -M$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

La suite  $L_n$  est décroissante, on vient de voir qu'elle était minorée, cette suite converge donc. On appelle  $L$  sa limite. Montrons que  $L$  est la limite de la suite  $(u_n)$ .

On choisit  $\varepsilon > 0$  quelconque, alors :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2) \Rightarrow (L_n - L \leq \varepsilon). \quad (\text{C.1.1})$$

D'autre part puisque la suite est de Cauchy :

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \\ \{(m \geq N_1) \text{ et } (n \geq N_1)\} \Rightarrow (|u_m - u_n| \leq \varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{C.1.2})$$

On pose  $N = \max(N_1, N_2)$ .

$L_N$  est la borne supérieure de  $A_N = \{u_i, i \geq N\}$ , donc il existe  $u_p$  tel que  $p \geq N$  et  $L_N - \varepsilon < u_p \leq L_N$ , sinon  $L_N - \varepsilon$  serait majorant de  $A_N$ , donc  $L_N$  ne serait pas borne supérieure de  $A_N$ . On a donc  $0 \leq L_N - u_p < \varepsilon$ , donc

$$|L_N - u_p| < \varepsilon \quad (\text{C.1.3})$$

On choisit maintenant  $n \geq N$ , on a alors :

$$|u_n - L| \leq |u_n - u_p| + |u_p - L_N| + |L_N - L| \leq 3\varepsilon$$

en effet :

—  $n \geq N, p \geq N$  donc  $n \geq N_1, p \geq N_1$  donc d'après [C.1.2](#)

$$|u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

— d'après [C.1.3](#)

$$|u_p - L_N| \leq \varepsilon.$$

## Document

### C.1.2

Convergence  
des suites de  
Cauchy

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

—  $N \geq N_2$  donc d'après C.1.1

$$|L_N - L| \leq \varepsilon.$$

On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \{n \geq N \Rightarrow |L - u_n| \leq 3\varepsilon\}$$

Ce qui démontre bien la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $L$ .

[Retour au cours](#)

## Document

### C.1.2

Convergence  
des suites de  
Cauchy

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document C.1.3 Convergence des suites de Cauchy (deuxième démonstration)

Nous avons le

**Théorème C.1.2.** *Toute suite de Cauchy est convergente dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration* - Cette propriété résulte directement comme nous allons le voir de l'axiome de la borne supérieure. Soit donc  $(u_n)$  une suite de Cauchy. Elle vérifie, par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \{ (m \geq N) \text{ et } (n \geq N) \} \Rightarrow (|u_m - u_n| \leq \varepsilon). \end{array} \right.$$

Il en découle en choisissant  $m = N$  que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (|u_N - u_n| \leq \varepsilon).$$

Ceci montre, que, à partir d'un certain rang  $N$ , la suite est bornée. Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow u_N - \varepsilon \leq u_n \leq u_N + \varepsilon.$$

L'axiome de la borne supérieure nous permet alors d'affirmer que cette suite possède une borne inférieure  $l_N$  et une borne supérieure  $L_N$ , soit :

$$l_N = \inf_{n \geq N} u_n \quad \text{et} \quad L_N = \sup_{n \geq N} u_n$$

Donnons alors à  $\varepsilon$  successivement les valeurs  $\varepsilon_q = 2^{-q}$ , pour  $q = 0, 1, \dots$ . Soient alors  $N_q$ ,  $q = 0, 1, \dots$ , les valeurs de  $N$  correspondant à ces valeurs de  $\varepsilon$ . Les bornes associées  $l_{N_q}$  et  $L_{N_q}$  sont alors les éléments de deux suites adjacentes  $(l_{N_q})$  et  $(L_{N_q})$ , indicées par  $q$ . En effet :

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

— la suite  $(l_{N_q})$  est croissante, car :

$$(N_q \geq N_p) \Rightarrow \left( \inf_{n \geq N_q} u_n \geq \inf_{n \geq N_p} u_n \right),$$

— la suite  $(L_{N_q})$  est décroissante, car :

$$(N_q \geq N_p) \Rightarrow \left( \sup_{n \geq N_q} u_n \leq \sup_{n \geq N_p} u_n \right),$$

— enfin,  $l_{N_q} < L_{N_q}$  et  $L_{N_q} - l_{N_q} \leq 2\varepsilon_q$ .

On en déduit aussitôt que ces deux suites convergent vers une même limite  $l$ . Comme par ailleurs, nous avons :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_q, \quad l_{N_q} \leq u_n \leq L_{N_q},$$

il en découle que la suite  $(u_n)$  converge aussi vers cette limite  $l$ .

[Retour au cours](#)

## Document

### C.1.3

Convergence  
des suites de  
Cauchy  
(deuxième  
démonstration)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document C.1.4 Convergence d'une suite récurrente

**Proposition C.1.1.** *Si la fonction  $f$  vérifie la condition suivante, dite **condition de Lipschitz** :*

$$(L) \quad \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

*si de plus  $0 < K < 1$ , alors la suite récurrente  $u_{n+1} = f(u_n)$  est convergente.*

La démonstration repose sur les suites de Cauchy.

*Démonstration* - Appliquant l'hypothèse (L) à  $x = u_n$  et  $y = u_{n-1}$ , on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K|u_n - u_{n-1}|$$

et par récurrence

$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|.$$

Par suite, pour tout  $p > 1$ ,

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &\leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq (K^{n+p-1} + K^{n+p-2} + \cdots + K^n) |u_1 - u_0| \\ &\leq K^n (1 + K + \cdots + K^{p-1}) |u_1 - u_0| \\ &\leq K^n \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0| \\ &\leq K^n \frac{1}{1 - K} |u_1 - u_0| \end{aligned} \tag{C.1.4}$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

ce dernier terme tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, la suite est donc de Cauchy et en conséquence elle est convergente.

Nous allons montrer maintenant que cette limite est nécessairement solution de l'équation  $x = f(x)$ , autrement dit que  $l$  est un **point fixe** de  $f$ .

Le principe de la démonstration est celui que nous avons utilisé pour montrer que la suite  $(K^n)$  converge vers 0, lorsque  $|K|$  est strictement inférieur à 1.

- La suite  $(u_{n+1})$  converge vers la même limite  $l$  que la suite  $(u_n)$ ,
- Il résulte de la condition de Lipschitz que  $|f(u_n) - f(l)| \leq K|u_n - l|$ , ce qui montre que la suite  $(u_{n+1} = f(u_n))$  converge vers  $f(l)$  quand la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ ,
- L'unicité de la limite entraîne alors que  $l = f(l)$ .

[Retour au cours](#)

## Document

### C.1.4

Convergence  
d'une suite  
récurrente

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document C.1.5 Sommes partielles d'une série géométrique

Soit à calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $r \in \mathbb{R}$ , l'expression suivante :

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n.$$

Multiplions  $S_n$  par  $(1 - r)$ . Nous obtenons :

$$(1 - r)S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n - r - r^2 - r^3 - \cdots - r^n - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}$$

d'où la formule classique, définie pour  $r \neq 1$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document C.1.6 Série absolument convergente

**Définition C.1.1.** La série de terme générale  $u_n$  est dite **absolument convergente** si la série de terme générale  $|u_n|$  converge.

La proposition suivante fournit un outil efficace pour la vérification de la convergence des séries.

### Proposition C.1.2.

- Si une série est absolument convergente, elle converge.
- Si, à partir d'un certain rang (i.e., si pour tout  $n \geq N$ , où  $N$  est un certain entier), on a

$$|u_n| \leq v_n$$

et si la série de terme général  $v_n$  converge, la série de terme général  $u_n$  converge absolument.

On compare donc la valeur absolue du terme général  $u_n$  avec le terme général d'une série positive convergente.

Ainsi, nous savons que la série de terme général  $v_n$  définie par

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha},$$

où  $\alpha$  est un réel strictement supérieur à 1, est convergente. En conséquence, si l'on peut montrer que la série, de terme général  $u_n$ , à laquelle on s'intéresse vérifie  $|u_n| \leq v_n$ , on peut conclure

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

aussitôt que cette série  $u_n$  est absolument convergente. C'est ainsi notamment que l'on montre que la série de terme général  $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$  converge absolument.

Ce dernier exemple fournit un « prototype » de **série de Fourier**. Une série de Fourier est une série de terme général dépendant d'une variable  $x$  sous la forme

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

où  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites données. Ces séries constituent un outil mathématique **fondamental** dans l'étude des phénomènes physiques périodiques, notamment en théorie du signal. Elles seront étudiées ultérieurement.

En ce qui concerne la série  $1/(n^\alpha)$ , nous avons vu que la série  $1/n$  diverge et que la série  $1/n^2$  converge. Il est alors possible d'en déduire que pour  $\alpha < 1$ , la série  $1/(n^\alpha)$  diverge, alors qu'elle converge pour  $\alpha > 2$  (faire cette démonstration en exercice). Le cas plus délicat est celui où  $\alpha$  est compris entre 1 et 2.

[Retour au cours](#)

**Document**  
**C.1.6**  
Série  
absolument  
convergente

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## C

Cauchy (suites de) .....	<b>35</b>
Comparaison de suites .....	<b>19</b>
Convergence d'une suite .....	<b>5</b>
Convergence d'une série .....	<b>42</b>

## E

Exemples de suites .....	<b>7</b>
--------------------------	----------

## L

Les règles de Riemann .....	<b>45</b>
-----------------------------	-----------

Limite-unicité .....	<b>9</b>
----------------------	----------

## P

Produit de suites convergentes .....	<b>23</b>
--------------------------------------	-----------

## Q

Quotient de suites .....	<b>27</b>
--------------------------	-----------

## S

Somme de suites convergentes .....	<b>17</b>
Somme, produit de suites qui tendent vers l'infini .....	<b>25</b>
Suite bornée .....	<b>13</b>
Suite croissante .....	<b>15</b>
Suite extraite .....	<b>11</b>

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



Suite numérique - Définition.....	4
Suites adjacentes.....	33
Suites récurrentes.....	38
Suites équivalentes.....	30
Série - définition.....	41

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## Solution de l'exercice A.1.1

$$u_n = \alpha^n u_0$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.2

La convergence de la suite  $(u_n)$  vers  $l$  s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon),$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|v_n| < \varepsilon),$$

puisque  $v_n = u_n - l$ . (Il n'y a donc pas de calcul!)

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.3

La limite d'une suite constante  $u_n = a$  est  $a$  puisque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = 1, (n > N) \Rightarrow (|u_n - a| = 0 < \varepsilon).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.4

Soit  $\varepsilon > 0$ , alors

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il suffit donc de choisir ,

$$N \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Par exemple

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1.$$

on a aura alors

$$(n > N) \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.5

Rappelons nous que  $P \Rightarrow Q$  s'écrit **(non P) ou Q**, expression dont la négation est **P et (non Q)**.

Nous arrivons ainsi à :

$$\forall l, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \text{ et } (|u_n - l| \geq \varepsilon).$$

Pour montrer que la suite  $u_n = (-1)^n$  (qui ne prend que les valeurs +1 et -1) diverge nous allons faire une démonstration cas par cas sur  $l$ .

- $\forall l \geq 0, \exists 0 < \varepsilon \leq l + 1, \forall N, \exists n = 2N + 1$  et  $|u_n - l| = |-1 - l| = 1 + l \geq \varepsilon$
- $\forall l < 0, \exists 0 < \varepsilon \leq -l + 1, \forall N, \exists n = 2N$  et  $|u_n - l| = |1 - l| = 1 - l \geq \varepsilon$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.6

1.  $\varphi(0) \geq 0$  est évident.

On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\varphi(n_0) < n_0$ . Alors  $\varphi(n_0) \leq n_0 - 1$  et parmi les  $(n_0 + 1)$  images

$$0 \leq \varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n_0) \leq n_0 - 1,$$

il y a au plus  $n_0$  valeurs distinctes. Donc au moins deux de ces images sont identiques, ce qui contredit la stricte monotonie.

2. On démontre la convergence de  $(u_{\varphi(n)})$  vers  $\ell$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse  $(u_n)$  converge donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

D'après le résultat précédent, il suffit de concaténer les inégalités

$$\varphi(n) \geq n > N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$

*A partir du même indice  $N$ , les termes de la suite  $(u_{\varphi(n)})$  s'accroissent autour de  $\ell$  avec un écart au plus égal à  $\varepsilon$ .*

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.7

Puisque  $P \Rightarrow Q$  est équivalent à  $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ , et sachant que toute suite convergente est bornée, nous arrivons à : toute suite non bornée est divergente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.8

La suite est croissante car (le vérifier)

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2}$$

et elle est bornée, puisque

$$|u_n| = u_n \leq 1,$$

elle est donc convergente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.9

1. Se déduit immédiatement du fait que :

$$\begin{aligned} & \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \\ & \left\{ \{(m \leq n) \Rightarrow (u_m \leq u_n)\} \text{ et } \{(m \leq n) \Rightarrow (v_m \leq v_n)\} \right\} \\ & \Rightarrow \{(m \leq n) \Rightarrow (u_m + v_m \leq u_n + v_n)\} \end{aligned}$$

2. Se déduit immédiatement du fait que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \{(m \leq n) \Rightarrow (u_m \leq u_n)\} \Rightarrow \{(m \leq n) \Rightarrow (-u_m \geq -u_n)\}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.10

On va montrer la contraposée, c'est à dire :

S'il existe un entier  $N$  tel que  $l < u_N$ , alors la suite  $(u_n)$  ne converge pas vers  $l$ .

Si  $l < u_N$ , alors, du fait de la croissance de la suite  $(u_n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow (l < u_N \leq u_n),$$

de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow (0 < u_N - l \leq u_n - l).$$

La proposition  $(u_n)$  converge vers  $l$  se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N' \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon),$$

Donc sa négation se traduit par :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N' \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n > N') \text{ et } (|u_n - l| \geq \varepsilon),$$

On peut choisir  $\varepsilon = u_N - l$ .

Pour tout  $N'$ , on peut choisir  $n = \max(N' + 1, N)$ .

On a alors  $n > N'$  et  $n \geq N$  donc  $u_n - l \geq u_N - l = \varepsilon$  donc  $|u_n - l| \geq \varepsilon$ .

Ceci termine de démontrer que la suite  $(u_n)$  ne converge pas vers  $l$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.11

On écrit que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent, soit pour tout  $\varepsilon > 0$  donné,

$$\exists N_1, (n > N_1) \Rightarrow (|u_n - \hat{u}| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\exists N_2, (n > N_2) \Rightarrow (|v_n - \hat{v}| < \frac{\varepsilon}{2})$$

et par conséquent

$$\exists N = \max(N_1, N_2), (n > N) \Rightarrow (|u_n + v_n - \hat{u} - \hat{v}| \leq |u_n - \hat{u}| + |v_n - \hat{v}| < \varepsilon)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.12

On a donc  $-v_n \leq u_n \leq v_n$ ,  $-v_n$  et  $v_n$  ont pour limite 0, on applique le théorème 3.1.3 qui permet de conclure que  $u_n$  tend vers 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.13

On a  $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq M |u_n|$ .

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M |u_n| = 0.$$

D'où (en utilisant l'exercice précédent) la suite  $(u_n v_n)$  tend vers 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.14

1. (a)

$$u_n = n, v_n = -n^2, u_n + v_n = n(1 - n).$$

(b)

$$u_n = n^2, v_n = -n, u_n + v_n = n(n - 1).$$

(c)

$$u_n = n, v_n = -n, u_n + v_n = 0.$$

2. (a)

$$u_n = n^4, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n v_n = n^2.$$

(b)

$$u_n = n^2, v_n = \frac{1}{n^4}, u_n v_n = \frac{1}{n^2}.$$

(c)

$$u_n = n^2, v_n = \frac{1}{n^2}, u_n v_n = 1.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.15

1. Puisque  $l > 0$ , il existe  $0 < \varepsilon < l$ . On choisit un tel  $\varepsilon$ . Puisque la suite converge, on a

$$\exists N, (n > N) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon).$$

Or  $l - \varepsilon > 0$ , d'où  $u_n > 0$  pour  $n > N$ .

2. Les éléments de la suite  $v_n$  existent donc pour  $n > N$  et on sait que la limite du quotient de deux suites convergentes, dans ce cas, est le quotient des limites, soit  $\frac{1}{7}$ .
3. Le raisonnement est le même pour  $l < 0$  car dans ce cas il suffit d'utiliser la suite  $(-u_n)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.16

(i) Mettre le tout au même dénominateur :

$$u_n = \frac{2(n+1) - 3n}{n(n+1)} = \frac{2-n}{n^2+n} \sim -\frac{1}{n}.$$

(ii) Mettre le tout au même dénominateur :

$$u_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sim \frac{2}{n^3}.$$

(iii) Ici, il faut factoriser par les termes dominants au numérateur et dénominateur :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.17

1. Prendre  $f(x) = x - 1$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1}$  et  $v_n = \frac{n+1}{n}$

$$u_n \sim v_n \text{ alors que } f(u_n) = -\frac{1}{n+1} \sim -\frac{1}{n} \text{ et } f(v_n) = \frac{1}{n} \text{ donc } \frac{f(u_n)}{f(v_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

$(f(u_n))$  et  $(f(v_n))$  ne sont pas équivalentes.

2. Avec  $u_n = n^2 + n$  et  $v_n = n^2 - n$ , on a bien  $u_n \sim v_n$ . Pourtant  $u_n - v_n = 2n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .
3. Avec  $u_n = \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{1}{n^2}$ , on a bien  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Pourtant  $\frac{u_n}{v_n} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne sont pas équivalentes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.18

On peut vérifier aisément que  $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$ , que  $\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{a_{n+1}-9}{10^{n+1}} \leq 0$  et que  $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n} > 0$  tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.19

1. L'implication de la deuxième proposition par la première est claire, puisque, quel que soit l'entier naturel  $p$ ,  $n + p$  est supérieur ou égal à  $n$ .
2. L'implication réciproque provient du fait que si on prend  $m$  et  $n$  quelconques, nécessairement l'un des deux est supérieur ou égal à l'autre, par exemple  $m \geq n \geq N$  et on peut alors poser  $m = n + p$  ( $p \geq 0$ ).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.20

Puisqu'il y a équivalence entre suite de Cauchy et suite convergente, il suffit de démontrer que la suite  $(u_n)$  n'est pas une suite de Cauchy, c'est à dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m \geq N(\varepsilon) \exists n \geq N(\varepsilon) |u_m - u_n| > \varepsilon.$$

En effet si l'on prend  $\varepsilon = 1$ ,  $m = 2N$ ,  $n = 2N + 1$ , on obtient  $|u_m - u_n| = 2 > 1$ , ce qui achève la démonstration.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.21

On montre par récurrence que  $u_n = K^n$ . Donc  $u_n \geq 0$ .

La suite  $(u_n)$  est décroissante ( $u_{n+1} - u_n = (K - 1)u_n \leq 0$ ).

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. Soit  $l$  sa limite.

Puisque la suite  $(u_{n+1})$  a la même limite que la suite  $(u_n)$ , on a

$$l = Kl \Leftrightarrow l(K - 1) = 0$$

et comme  $K < 1$ , la seule solution est  $l = 0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.22

On peut montrer par récurrence que  $u_n = \alpha^n u_0$ .

- Lorsque  $-1 < \alpha < 1$ , on définit  $v_n = |u_n| = |u_0| |\alpha|^n$ . On a démontré dans l'exercice [A.1.18](#) que la suite  $|\alpha|^n$  convergeait vers 0. La suite  $(v_n = |u_n|)$  converge donc vers 0 et donc la suite  $(u_n)$  converge vers 0.
- Lorsque  $1 < \alpha$ , on pose  $v_n = 1/|u_n|$ , on utilise l'exercice [A.1.18](#) pour montrer que  $(v_n)$  converge vers 0, donc  $u_n$  tend vers  $+\infty$ , donc la suite  $(u_n)$  ne converge pas.
- Lorsque  $\alpha < -1$ , on pose  $v_n = 1/|u_n|$ , on utilise l'exercice [A.1.18](#) pour montrer que  $v_n$  converge vers 0, donc  $|u_n|$  tend vers  $+\infty$ , donc la suite  $(u_n)$  ne converge pas.
- Lorsque  $\alpha = 1$ , on obtient une suite constante (laquelle?).
- Lorsque  $\alpha = -1$ , on obtient une suite divergente bien connue (laquelle?).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.23

Supposons qu'il existe deux solutions distinctes  $l_1$  et  $l_2$  de l'équation  $u = f(u)$ , soit  $l_1 = f(l_1)$  et  $l_2 = f(l_2)$ . Alors, on a

$$|l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| \leq K|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$$

ce qui est impossible ...

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.24

1.  $S_0 = u_0 = 0$ ,  $S_n = u_0 + \dots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$ .
2. On procède par l'absurde. Supposons que  $(S_n)$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors la suite  $(S_{2n})$  converge vers  $\ell$  également. D'après les opérations sur les limites, on en déduit le résultat suivant :  $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell - \ell = 0$ .  
Maintenant, calculons  $S_{2n} - S_n$  :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=0}^{2n} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

La suite  $(u_n)$  étant décroissante on a

$$n+1 \leq k \leq 2n \Rightarrow u_{n+1} \geq u_k \geq u_{2n} \Rightarrow u_k \geq u_{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Donc

$$S_{2n} - S_n \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - S_n = 0 \geq \frac{1}{2}$ . Ce qui est absurde. Donc  $(S_n)$  est une suite divergente.

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Le fait que la suite  $(u_n)$  tende vers 0 est une condition nécessaire mais non suffisante pour que la série  $(u_n)$  converge, comme le montre cet exemple.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.25

- (i)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  tend vers  $+\infty$  donc  $\sum_{n \geq 1} u_n$  tend vers  $-\infty$
- (ii)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$  converge donc  $\sum_{n \geq 1} u_n$  aussi.
- (iii)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum_{n \geq 1} u_n$  aussi.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.1

On cherche une condition sur  $n$  impliquant que  $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \epsilon$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

NON,  $(u_n + v_n)$  diverge.

Supposons que  $(u_n + v_n)$  converge, on peut écrire  $v_n = -u_n + (u_n + v_n)$ , donc en utilisant les résultats sur la somme de suites convergentes on en déduit que la suite  $(v_n)$  converge, ce qui est impossible.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Il n'y a aucune règle, on peut prendre  $u_n = (-1)^n$ . Alors si on définit  $u_n + u_n = 2(-1)^n$ , cette somme de 2 suites divergentes est une suite divergente.

Par contre si on définit  $u_n + (-u_n) = 0$ , cette somme de suites divergentes est une suite convergente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 1, Exercice A.2.3

Pour i) on peut écrire  $u_n = n - \frac{1}{n}$ , quel théorème utiliser?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.3

La somme d'une suite qui tend vers  $+\infty$  et d'une suite qui est minorée est une suite qui tend vers  $+\infty$ .  
De plus une suite qui converge est minorée.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1, Exercice A.2.3

Pour ii), on peut écrire (puisque  $n$  est positif),  $n = \sqrt{n^2}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 2, Exercice A.2.3

Pour iii), on peut écrire  $u_n = e^{\sqrt{n^2+1}-n}$ .

Comment lever l'indétermination sur  $\sqrt{n^2+1}-n$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.3

On peut multiplier et diviser par  $\sqrt{n^2 + 1} + n$ .

On obtient ainsi l'inverse d'une suite qui tend vers l'infini.

Terminer en utilisant l'exponentielle.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2, Exercice A.2.3

Pour iv), que vaut la somme partielle d'une série arithmétique?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 4, Question 2, Exercice A.2.3

Ecrire cette somme en changeant l'ordre des termes, faire la somme terme à terme, on obtient  $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Le calcul de limite devient facile.

Il n'était pas nécessaire de calculer la somme, comment aurait-on pu faire ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 2, Exercice A.2.3

$u_n > n + 1$  permet de conclure immédiatement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3, Exercice A.2.3

Pour v), on peut écrire

$$u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}.$$

$\frac{1}{n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice A.2.3

Pour vi),  $\frac{1}{n}$  tend vers 0, il semble que  $\sin n$  ne possède pas de limite, mais.....

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 3, Exercice A.2.3

$\sin n$  est une suite bornée :  $\forall n, -1 \leq \sin n \leq 1$ .

Le produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée est une suite qui tend vers 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 4, Exercice A.2.3

Pour vii), on peut écrire

$$u_n = n \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}.$$

Quel théorème peut-on alors utiliser?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 4, Exercice A.2.3

Le produit d'une suite qui tend vers  $+\infty$  et d'une suite qui admet une limite strictement positive est une suite qui tend vers  $+\infty$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 4, Exercice A.2.3

Pour viii), il n'y a pas vraiment de problème, la valeur absolue de  $\frac{(-1)^n}{n}$  tend vers 0, donc  $\frac{(-1)^n}{n}$  tend vers 0.  
 $\sin \frac{1}{n}$  tend vers 0.  
Donc  $u_n$  tend vers 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 5, Exercice A.2.3

Pour ix) on peut mettre  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  en facteur au numérateur, on peut mettre  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  en facteur au dénominateur.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 5, Exercice A.2.3

On obtient

$$u_n = \frac{1 - 1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}.$$

D'où la limite.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 5, Exercice A.2.3

Pour x), on peut mettre  $3^2$  en facteur au dénominateur, on obtient :

$$u_n = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Que vaut donc  $u_n$  ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 5, Exercice A.2.3

$$u_n = \frac{1}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}.$$

En déduire la limite de  $u_n$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.6

On fait une figure et on constate :

- Pour  $a = \frac{1}{2}$  le comportement est différent selon que  $u_0 < 2$ ,  $u_0 = 2$ ,  $u_0 > 2$ .
- Pour  $a = -\frac{1}{2}$  le comportement est différent selon que  $u_0 = \frac{2}{3}$ ,  $u_0 \neq \frac{2}{3}$ .
- Pour  $a = 2$  le comportement est différent selon que  $u_0 < -1$ ,  $u_0 = -1$ ,  $u_0 > -1$ .
- Pour  $a = -2$  le comportement est différent selon que  $u_0 = \frac{1}{3}$ ,  $u_0 \neq \frac{1}{3}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.6

- Pour  $a = \frac{1}{2}$ 
  - Si  $u_0 < 2$ , la suite est croissante et elle converge vers 2.
  - $u_0 = 2$ , la suite est constante et égale à 2.
  - Si  $u_0 > 2$ , la suite est décroissante et elle converge vers 2.
- Pour  $a = -\frac{1}{2}$ 
  - Si  $u_0 = \frac{2}{3}$ , la suite est constante égale à  $\frac{2}{3}$ .
  - Si  $u_0 \neq \frac{2}{3}$ , la suite converge vers  $\frac{2}{3}$ , mais elle n'est ni croissante ni décroissante.
- Pour  $a = 2$ 
  - Si  $u_0 < -1$ , la suite est décroissante et elle diverge.
  - $u_0 = -1$ , la suite est constante et égale à  $-1$ .
  - Si  $u_0 > -1$ , la suite est croissante et elle diverge.
- Pour  $a = -2$ 
  - Si  $u_0 = \frac{1}{3}$ , la suite est constante égale à  $\frac{1}{3}$ .
  - Si  $u_0 \neq \frac{1}{3}$ , la suite diverge, mais elle n'est ni croissante ni décroissante.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.6

Pour  $a = 1$ , on montre facilement que

$$u_n = u_0 + nb.$$

La convergence dépend donc de la valeur de  $b$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.6

- Si  $b < 0$ , la suite  $u_n$  tend vers  $-\infty$ .
- Si  $b = 0$ , la suite  $u_n$  est constante égale à  $u_0$ .
- Si  $b > 0$ , la suite  $u_n$  tend vers  $+\infty$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.6

En utilisant le résultat sur la somme des suites convergentes, on obtient :

$$l = al + b \Leftrightarrow l = \frac{b}{1 - a}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.6

On a

$$u_{n+1} = au_n + b, l = al + b.$$

En déduire une relation entre  $v_{n+1}$  et  $v_n$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2c, Exercice A.2.6

En faisant la différence des deux égalités on obtient :

$$v_{n+1} = av_n.$$

En déduire la relation liant  $v_{n+1}$  et  $v_0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2c, Exercice A.2.6

On a donc

$$v_{n+1} = a^{n+1} v_0.$$

Discuter suivant les valeurs de  $a$  et  $v_0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 2c, Exercice A.2.6

Si  $v_0 = 0$ , la suite  $v_n$  est donc constante égale à 0.

Donc  $u_n$  est constante égale à  $l$ . On aurait pu trouver ce résultat directement.

Que se passe-t-il si  $v_0 \neq 0$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 2c, Exercice A.2.6

Si  $v_0 \neq 0$ , la suite  $v_n$  dépend du comportement de  $a^n$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 6, Question 2c, Exercice A.2.6

- Si  $|a| < 1$ , alors la suite  $v_n$  tend vers 0, donc la suite  $u_n$  tend vers  $l$ .
  - Si  $a = 1$ , le cas a déjà été étudié :
    - Si  $b < 0$ , la suite  $u_n$  tend vers  $-\infty$ .
    - Si  $b = 0$ , la suite  $u_n$  est constante égale à  $u_0$ .
    - Si  $b > 0$ , la suite  $u_n$  tend vers  $+\infty$ .
  - Si  $|a| > 1$ 
    - Si  $v_0 \neq 0$ , c'est à dire si  $u_0 \neq l$ , la suite  $v_n$  ne converge pas, donc la suite  $u_n$  ne converge pas.
    - Si  $v_0 = 0$ , c'est à dire si  $u_0 = l$ , la suite  $v_n$  est constante égale à 0, donc la suite  $u_n$  est constante égale à  $l$ .
- Ces cas sont en accord avec les différents cas particuliers étudiés au début.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.8

Il suffit de démontrer que la racine carrée a toujours un sens!

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.8

En utilisant vos souvenirs de terminale, il est facile de montrer que  $f$  est croissante sur  $]1, +\infty[$ , que  $f(x) - x$  s'annule en  $\alpha = 2$  en étant positive sur  $]1, 2[$  et négative sur  $]2, +\infty[$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.8

Sur un même graphe tracer la fonction  $y = f(x)$  et la droite  $y = x$ . Prenez  $u_0 < 2$  et construisez à la main  $u_1, u_2, \dots$  et vous voyez que la suite est croissante et majorée par 2. Faites la même chose en prenant  $u_0 > 2$ , que constatez-vous?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1d, Exercice A.2.8

Commencez par prendre  $u_0 < 2$  et montrez, peut-être par récurrence, que la suite est majorée par 2 et croissante.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1d, Exercice A.2.8

En utilisant la croissance de  $f$ , montrer, par récurrence, que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 2$ . (N'oubliez pas que  $f(2) = 2$ .) Toujours en utilisant la croissance de  $f$ , montrer, par récurrence, que la suite est croissante. Attention, il faut démarrer la récurrence et il y a là une petite difficulté.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1d, Exercice A.2.8

Pour démarrer la récurrence pour la croissance de la suite, il faut démontrer que  $u_0 \leq u_1$ . Utiliser le fait que  $u_1 = f(u_0)$  et que vous connaissez le signe de  $f(x) - x$ . Vous obtenez donc une suite croissante et majorée. Est-elle convergente? et si oui, vers quelle limite?

[Retour à l'exercice ▲](#)

#### Aide 4, Question 1d, Exercice A.2.8

Pour être sûr d'avoir bien compris, utiliser une démarche similaire pour démontrer que si  $u_0 > 2$ , la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 2, donc convergente. Vers quelle limite?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.8

De la même manière que pour la question précédente (mais les calculs sont plus compliqués), vous montrerez que :

- Tous les termes de la suite sont bien définis car  $u_n \geq 0$  pour  $n \geq 1$ .
- Il suffit, d'après la question précédente, d'étudier  $f(x) = \sqrt{9+x}$  et le signe de  $f(x) - x$  sur  $[0, +\infty]$  (Attention,  $\alpha$  n'est pas "simple").
- La suite se démontre de la même manière.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice A.2.8

Cette question est laissée à votre réflexion. Les résultats sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } u_0 > 0 : \text{ la suite converge vers } 0, \\ \text{si } u_0 = 0 : \text{ la suite est constante,} \\ \text{si } u_0 < 0 : \text{ la suite diverge.} \end{array} \right.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.9

Etudier aussi le signe de  $f(x) - x$ , puis de  $f(x) - \sqrt{a}$  sur  $]\sqrt{a}, +\infty[$ . Les résultats sont donnés par vos connaissances de terminale.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.9

Comment peut-on démontrer qu'une suite est convergente sans connaître sa limite?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.9

Commencez par démontrer que la suite est minorée. Par quelle valeur? Puis étudier sa croissance ou décroissance.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2, Exercice A.2.9

Les deux raisonnements se font par récurrence en utilisant la croissance de  $f$  et le signe de  $f(x) - x$ . Comment calcule-t-on alors la limite  $l$  de la suite?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3, Exercice A.2.9

Il suffit de calculer  $\varepsilon_{n+1}$  en remplaçant  $u_{n+1}$  par sa valeur en fonction de  $u_n$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.9

Montrer tout d'abord que  $\varepsilon_{n+1} \leq b \left( \frac{\varepsilon_n}{b} \right)^2$  puis itérer astucieusement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.10

On a donc

$$cu_n u_{n+1} + du_{n+1} = au_n + b.$$

Utilisez les résultats sur les sommes et produits de suites convergentes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.10

On aura donc

$$cl^2 + dl = al + b \Leftrightarrow cl^2 + r(d - a)l - b = 0.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.10

Raisonnement par l'absurde.

Si la suite  $u_n$  convergait vers  $l$ , quelle serait l'équation vérifiée par  $l$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.10

On aurait  $l^2 + 9 = 0$ , ce qui est impossible, donc la suite  $u_n$  ne converge pas.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3a, Exercice A.2.10

Résoudre l'équation ( $E$ ) et on trouve deux solutions  $\alpha = -3$  et  $\beta = 1$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3b, Exercice A.2.10

Remplacer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3b, Exercice A.2.10

On trouve  $\lambda = 5$  et si vous avez choisi  $\alpha = 1$  et  $\beta = -3$ , vous trouvez  $\lambda = \frac{1}{5}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3c, Exercice A.2.10

Itérer le calcul jusqu'à  $u_0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3c, Exercice A.2.10

On trouve  $\frac{u_{n+1} + 3}{u_{n+1} - 1} = (5)^n \frac{u_0 + 3}{u_0 - 1}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3d, Exercice A.2.10

Poser  $K_n = (5)^n \frac{u_0 + 3}{u_0 - 1}$  et exprimer  $u_n$ . Quelle condition faut-il imposer pour pouvoir définir  $u_n$  ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3d, Exercice A.2.10

On trouve  $(1 - K_n)u_n = K_n + 1$ . Il faut donc imposer  $K_n \neq 1$  ce qui donne des conditions sur  $u_0$ . Lesquelles?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 3d, Exercice A.2.10

Les calculs donnent :  $u_0 \neq \frac{1 + 3 \times 5^n}{-5^n + 1}$ , pour  $n = 1, 2, \dots$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3e, Exercice A.2.10

Passez à la limite quand  $n$  tend vers l'infini dans l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $u_0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3e, Exercice A.2.10

La suite  $(u_n)$  converge vers 1 si  $u_0 \neq -3$  et  $u_n = -3$  pour tout  $n$  si  $u_0 = -3$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.10

On obtient :  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\lambda = \frac{1}{3}$ ,  $u_0 \neq \frac{3^n}{3^n - 1}$  ( $n \geq 1$ ) et  $(u_n)$  converge vers 0 si  $u_0 \neq 1$  et la suite est constante si  $u_0 = 1$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 5, Exercice A.2.10

On obtient :  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 3$ ,  $\lambda = 2$ ,  $u_0 \neq \frac{2^n + 3}{1 - 2n}$  ( $n \geq 1$ ) et  $(u_n)$  converge vers 3 si  $u_0 \neq -1$  et la suite est constante si  $u_0 = -1$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 6, Exercice A.2.10

On obtient :  $\alpha = \beta = 2$ ,  $\frac{1}{u_{n+1}-2} = \frac{1}{u_n-2} - \frac{1}{6}$ ,  $u_0 \neq \frac{6}{n} + 2$  ( $n \geq 1$ ) et  $(u_n)$  converge vers 2.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.11

On montre facilement que :

- $f$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$ , croissante sur  $] -\infty, 1]$ .
- Si  $x = \sqrt{a}$  ou  $x = -\sqrt{a}$ ,  $f(x) = x$ .
- Si  $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ ,  $f(x) > x$ .
- Si  $x < -\sqrt{a}$  ou  $\sqrt{a} < x$ ,  $f(x) < x$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.11

Sur une même figure tracer la courbe d'équation  $y = f(x)$  et la droite  $y = x$ . Pour la courbe d'équation  $y = f(x)$ , utiliser les résultats précédemment démontrés : croissance, décroissance, position par rapport à la droite  $y = x$ .

Prendre  $-\sqrt{a} < u_0 < \sqrt{a}$ , donc  $u_0$  est strictement compris entre les abscisses des deux points fixes.

Construire à la main  $u_1, u_2, \dots$  et voir que la suite est croissante, majorée par  $\sqrt{a}$  et qu'elle converge vers  $\sqrt{a}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3, Exercice A.2.11

Montrer par récurrence, que  $\forall n \in \mathbb{N}, -\sqrt{a} \leq u_n \leq \sqrt{a}$ . Il suffit d'utiliser la croissance de  $f$  sur l'intervalle  $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$ , ainsi que la définition des points fixes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice A.2.11

En déduire que la suite est croissante, il suffit d'utiliser le signe de  $f(x) - x$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 3, Exercice A.2.11

En déduire que la suite est convergente.

Quelles sont les limites possibles ?

Bien justifier la réponse à l'aide des théorèmes sur les sommes et produits de suites.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 4, Question 3, Exercice A.2.11

Montrer que la limite  $\ell$  vérifie  $u_0 \leq \ell$ . En déduire la valeur de  $\ell$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.12

Voir la définition des suites adjacentes dans le paragraphe [Suites adjacentes](#).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.12

La croissance d'une des deux suites ne pose aucun problème. Pour la décroissance de l'autre évaluer très précisément la différence de deux termes consécutifs. Les autres propriétés se vérifient aisément.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1, Exercice A.2.12

Pour montrer que la limite  $l$  n'est pas un rationnel, supposer que c'est un rationnel (quotient de deux entiers) et utiliser l'encadrement

$$v_n \leq l \leq u_n$$

pour arriver à une contradiction.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 1, Exercice A.2.12

On pose  $l = \frac{p}{q}$  et on écrit  $v_n \leq l \leq u_n$  pour  $n = q$ . En multipliant ces inégalités par  $q$  on arrive à une absurdité. Laquelle?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Question 1, Exercice A.2.12

L'absurdité provient du fait que l'on trouve un entier encadré par deux réels dont la différence est inférieure à  $\frac{1}{q}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.12

Voir la définition des suites adjacentes dans le paragraphe [Suites adjacentes](#).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.12

En écrivant les propriétés à démontrer, montrer qu'elles se ramènent toutes à étudier le signe d'une même quantité.  
Laquelle?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.12

Il s'agit du signe de  $u_n - v_n$ . Quel est-il?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 2, Exercice A.2.12

Calculer  $u_{n+1} - v_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et  $v_n$  et vous trouverez que ce signe est toujours positif pour  $n \geq 1$  si  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ . Ces deux dernières propriétés sont-elles vraies ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Question 2, Exercice A.2.12

Pour calculer la limite évaluer  $w_{n+1}$  en fonction de  $w_n$  et le résultat  $l = \sqrt{u_0 v_0}$  s'en déduit aisément.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice A.2.12

Voir la définition des suites adjacentes dans le paragraphe [Suites adjacentes](#).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice A.2.12

En écrivant les propriétés à démontrer, montrer qu'elles se ramènent toutes à étudier le signe d'une même quantité.  
Laquelle?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 3, Exercice A.2.12

Il s'agit du signe de  $u_n - v_n$  si l'on connaît les signes de  $u_n$  et  $v_n$ . A vous d'étudier ces différentes quantités.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 4, Question 3, Exercice A.2.12

Puisque  $v_n > 0$ , pour étudier la croissance de  $v_n$  vous pouvez regarder la quantité  $v_{n+1}^2 - v_n^2$ . Les autres propriétés des suites adjacentes se démontrent aisément en utilisant le signe de  $u_n - v_n$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.13

Calculer

$$u_{n+1} - u_n, v_{n+1} - v_n, u_n - v_n.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.13

On obtient :

$$(1) \quad u_n - v_n = \frac{(a-b)(u_{n-1} - v_{n-1})}{a+b}.$$

$$(2) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{b(v_n - u_n)}{a+b}$$

$$(3) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{b(u_n - v_n)}{a+b}$$

On sait que  $a$ ,  $b$  et  $a - b$  sont strictement positifs, que peut-on en déduire? Etudier par exemple le cas  $u_0 \leq v_0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.13

Si  $u_0 \leq v_0$ , la relation (1) :

$$(1) \quad u_n - v_n = \frac{(a-b)(u_{n-1} - v_{n-1})}{a+b}$$

permet de conclure que  $\forall n \quad u_n \leq v_n$ .

Quelle conclusion tire-t-on des relations (2) et (3) ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

#### Aide 4, Exercice A.2.13

Les relations (2) et (3) :

$$(2) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{b(v_n - u_n)}{a + b}$$

$$(3) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{b(u_n - v_n)}{a + b}$$

permettent alors de conclure que la suite  $u_n$  est croissante et que la suite  $v_n$  est décroissante.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Exercice A.2.13

Utiliser à nouveau la relation (1) pour montrer que la suite  $u_n - v_n$  est géométrique, quelle est la raison?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 6, Exercice A.2.13

Pour connaître la limite, on peut remarquer que  $u_n + v_n$  est constante.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1(a)i, Exercice A.2.14

La suite nulle vérifie la relation (A.2.1), on cherche maintenant les suites géométriques non nulles qui vérifient la relation (A.2.1), c'est à dire les suites qui s'écrivent

$$u_n = \alpha r^n, \text{ avec } \alpha \neq 0, r \neq 0.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1(a)i, Exercice A.2.14

Après simplification on obtient :

$$2r^2 = 5r - 2.$$

Résoudre cette équation.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1(a)i, Exercice A.2.14

Les suites géométriques possibles sont donc les suites de terme général :

$$\alpha 2^n, \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1(a)ii, Exercice A.2.14

Vérifier que l'on a bien :

$$2w_n = 5w_{n-1} - 2w_{n-2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.14

Dans la question (a), on a déterminé deux suites géométriques qui vérifient la relation (A.2.1).  
Est-ce que l'une d'entre elles vérifie les 3 conditions (A.2.2)?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.14

Non.

La suite de terme général  $u_n = \alpha 2^n$  vérifie (A.2.1).

Pour avoir  $u_0 = 6$  il est nécessaire d'avoir  $\alpha = 6$ .

Mais alors, on aura  $u_1 = 2 \times 6 = 12 \neq 9$ .

Pour des raisons similaires la suite  $u_n = \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n$  ne convient pas.

Penser à la deuxième partie de la question (a).

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1b, Exercice A.2.14

On cherche

$$u_n = \alpha 2^n + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Quel que soit le choix  $\alpha$  et  $\beta$ , la relation (A.2.1) est vérifiée.

Il reste donc à déterminer les deux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour que

$$u_0 = 6, \quad u_1 = 9.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1(c)i, Exercice A.2.14

On suppose qu'il existe une autre suite  $(u'_n)$  qui vérifie les conditions (A.2.2).

On va montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u'_n.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1(c)i, Exercice A.2.14

On a

$$u_0 = u'_0 = 6, \quad u_1 = u'_1 = 9.$$

Que se passe-t-il pour les autres termes?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1(c)i, Exercice A.2.14

Utiliser la relation (A.2.1) pour montrer que tous les autres termes sont égaux.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 1(c)i, Exercice A.2.14

La suite définie à la question (b) est donc la seule qui vérifie les conditions (A.2.2).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1(c)ii, Exercice A.2.14

La suite  $(u_n)$  est la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente, donc elle diverge.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.14

On utilise exactement la même démarche que dans la question 1.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3(a)i, Exercice A.2.14

Comme dans la question 1, on détermine une équation satisfaite par la raison  $r$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3(a)i, Exercice A.2.14

Cette fois l'équation du second degré admet une racine double  $r = -1$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3(a)ii, Exercice A.2.14

Montrer que

$$nv_n = -2(n-1)v_{n-1} - (n-2)v_{n-2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3(a)ii, Exercice A.2.14

Se souvenir que  $\forall k \in \mathbb{N}, v_{k+1} = -v_k$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3b, Exercice A.2.14

Comme on l'a montré dans la question 1. il existe une seule suite qui vérifie les conditions (A.2.4).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3b, Exercice A.2.14

On connaît des suites vérifiant la relation (A.2.3).

Quelles sont-elles ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 3b, Exercice A.2.14

Les suites de terme général

$$v_n = \alpha(-1)^n \text{ et } v'_n = n\beta(-1)^n$$

vérifient la relation (A.2.3).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 3b, Exercice A.2.14

La suite  $v_n + v'_n$  vérifie donc la relation (A.2.3) quel que soit le choix de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Etant donné  $u_0$  et  $u_1$ , il reste donc à déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  pour que

$$v_0 + v'_0 = u_0, \quad v_1 + v'_1 = u_1.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 3b, Exercice A.2.14

Après résolution on trouve

$$u_n = (-1)^n (u_0 - n(u_0 + u_1)).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3c, Exercice A.2.14

Si  $u_0 + u_1 \neq 0$ , la suite  $u_n$  n'est pas bornée, donc elle est divergente.

Si  $u_0 + u_1 = 0$ , on a  $u_n = u_0(-1)^n$ , cette suite converge si et seulement si  $u_0 = 0$ , donc  $u_1 = 0$ .

En résumé la suite converge si et seulement si  $u_0 = u_1 = 0$ .

Pour  $u_0 = u_1 = 0$ , on a la suite nulle, il était prévisible que cette suite était convergente.

Par contre on vient de montrer que parmi les suites qui vérifient la relation (A.2.3), la suite nulle est la seule qui soit convergente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.19

Comment montre-t-on qu'une suite est convergente sans connaître sa limite?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.19

La suite est croissante (pas de difficulté?). Par quoi peut-on la majorer?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.19

Puisque  $|\sin x| \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on peut majorer  $u_n$  par la somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique. Laquelle?

[Retour à l'exercice ▲](#)

#### Aide 4, Exercice A.2.19

$$u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Que vaut la dernière somme? Voir le paragraphe [Convergence d'une série](#).

[Retour à l'exercice ▲](#)