MT02-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 4 : Limites et continuité

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Printemps 2023

▽

Chapitre 4
Limites et continuité

4.1 Limites 3
4.2 Continuité d'une fonction 24
4.3 Introduction aux suites et séries de fonctions 42

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.1 Limites

4.1.1 Voisinage d'un point 4
4.1.2 Définition de la limite 6
4.1.3 Limites à gauche, à droite, à l'infini 9
4.1.4 Caractérisation de la limite par les suites 11
4.1.5 Propriétés des limites liées aux comparaisons des fonctions 14
4.1.6 Opérations sur les limites 17
4.1.7 Définition des limites généralisées 19
4.1.8 Opérations sur les limites généralisées 21

4.1.1 Voisinage d'un point

Exercices :
Exercice A.1.1

Soit D le domaine de définition d'une fonction f d'une variable réelle. En pratique, ce domaine est très souvent constitué de la réunion d'un nombre fini d'intervalles. Nous allons nous intéresser au comportement de f, lorsque le point x de D se rapproche d'un point a de $\mathbb{R}$.

Pour faire cette étude, il faut donner un sens précis à cette notion intuitive exprimée par l'expression 'se rapproche '. Ceci nous conduit à introduire la notion de **voisinage** de a que nous définissons par :

Définition 4.1.1. *On appelle* ***voisinage*** *de $a \in \mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$. On appelle* ***voisinage de a dans D*** *toute intersection de D avec un voisinage de a dans $\mathbb{R}$.*

Par exemple un voisinage de 0 est $]-1, 1[$ ou $[-1, 0.5]$ ou $[-1000, +0.001[$ mais par contre $[-1, 0]$ n'est pas un voisinage de 0 car il n'existe aucun réel α strictement positif tel que l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ soit contenu dans $[-1, 0]$.

Lorsque l'on parle de limite ou de continuité d'une fonction en un point a, c'est le comportement de la fonction dans un voisinage de a qui est important et non pas dans son domaine de

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

définition tout entier. De manière générale, on dit qu'une propriété est **locale** si elle est vraie dans un voisinage d'un point contrairement à une propriété **globale** qui est valable pour tout réel.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.1.2 Définition de la limite

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Pour étudier la limite d'une fonction en a il n'est pas nécessaire que la fonction f soit définie au point a considéré. Par exemple, il est tout à fait légitime, de s'intéresser au comportement au voisinage de 0, de la **fonction de Heaviside**, encore appelée **échelon unité** définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour} \quad x < 0, \\ 1, & \text{pour} \quad x > 0. \end{cases}$$

La valeur de H en 0 n'est pas donnée, mais nous allons voir que cela n'empêeche absolument pas l'étude du comportement de H au voisinage de 0

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition 4.1.2. *Soient* Ω *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, *a un point de* Ω *et* f *une fonction numérique définie sur* Ω *sauf éventuellement en a. On dit que* $f(x)$ ***tend vers l quand x tend vers a*** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, \{(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)\}. \tag{4.1.1}$$

On dit aussi que ***l est la limite de f en a*** *et on note :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Définition de la limite

On obtient une définition équivalente en remplaçant les inégalités strictes par des inégalités larges. Plus précisément, on peut montrer que la définition ci-dessous :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, \{(0 < |x-a| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon)\}. \tag{4.1.2}$$

est équivalente à la précédente. L'exemple de la fonction de Heaviside définie plus haut, montre pourquoi nous avons maintenu une inégalité stricte $0 < |x-a|$. C'est nécessaire, si l'on ne veut pas imposer à la fonction considérée d'être définie en a.

à titre d'exemple, étudions la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{|x|}$. Montrons qu'elle admet en 0 une limite qui est 0. Comme pour les suites, c'est l'écriture de la conclusion qui permet de remonter le raisonnement : on choisit un ε strictement positif quelconque et l'on veut trouver un η strictement positif tel que :

$$(0 < |x| < \eta) \Rightarrow (0 < \sqrt{|x|} < \varepsilon). \tag{4.1.3}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Or, on vérifie sans peine l'implication :

$$(0 < |x| < \varepsilon^2) \Rightarrow (0 < \sqrt{|x|} < \varepsilon) \tag{4.1.4}$$

Nous voyons qu'il suffit de prendre $\eta \le \varepsilon^2$, pour obtenir le résultat.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.1.3 Limites à gauche, à droite, à l'infini

Exercices :
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6

Définition 4.1.3. *Soient Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de Ω et f une fonction numérique définie sur Ω sauf éventuellement en a. On dit que la fonction f admet une* ***limite à droite*** *en a s'il existe un nombre l tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \{(a < x < a + \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)\}.$$

On notera $\boldsymbol{f(a+0)}$ ou simplement $\boldsymbol{f(a+)}$ la limite à droite.

On définit de façon analogue la **limite à gauche** de f en a et on notera $\boldsymbol{f(a-0)}$ ou simplement $\boldsymbol{f(a-)}$ la limite à gauche. Par exemple la fonction $\sqrt{x}$ admet en 0 une limite à droite égale à 0. Ce n'est qu'une limite à droite puisque cette fonction n'est définie que sur $[0, +\infty[$.

De même, la fonction de Heaviside définie au paragraphe précédent, admet en 0 une limite à droite, égale à +1 et une limite à gauche égale à 0.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition 4.1.4. *Soit f définie sur $]\omega,+\infty[$, on dit que* ***$f(x)$ tend vers l quand x tend vers*** $+\infty$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \geq \omega,\ \{(x > B) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)\}. \tag{4.1.5}$$

On dit aussi que ***l est la limite de f à l'infini*** *et on note :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

De même, si f est définie sur $]-\infty,\omega[$, on dit que ***$f(x)$ tend vers l quand x tend vers*** $-\infty$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \leq \omega,\ \{(x < B) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)\}. \tag{4.1.6}$$

à titre d'exemple, montrons que, quel que soit l'entier p positif, $1/x^p$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Nous voyons en effet que si nous posons, pour ε strictement positif donné, $B = \sqrt[p]{(1/\varepsilon)}$ alors :

$$(x > B) \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{x^p}\right) < \varepsilon\right).$$

Proposition 4.1.1. *Une fonction numérique f, définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en a qui sont égales.*

La démonstration est laissée en exercice.

4.1.4 Caractérisation de la limite par les suites

Exercices :
Exercice A.1.7

Documents :
Document C.1.1

Théorème 4.1.1. *Soient $a \in \mathbb{R}$, Ω un intervalle ouvert contenant a et f une fonction numérique définie sur $\Omega\backslash\{a\}$.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ est que : quelle que soit la suite (x_n), si (x_n) converge vers a, et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \Omega\backslash\{a\}$, alors la suite $(f(x_n))$ converge vers l.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left(\forall (x_n) \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \\ \textit{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \Omega\backslash\{a\} \end{array} \right. \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell \right).$$

Démonstration - Tout d'abord, remarquons que lorsqu'une suite (x_n) tend vers a, elle ne parcourt qu'un ensemble discret, c'est-à-dire indexé par $\mathbb{N}$, de valeurs. Au contraire, lorsque x tend vers a, il parcourt toutes les valeurs réelles au voisinage de a. La convergence pour $x \to a$ est donc une propriété beaucoup plus forte que la convergence lorsque $x_n \to a$. Le théorème est quand même vrai, comme nous allons le démontrer, parce que nous demandons que la convergence de $(f(x_n))$ vers l soit effective **pour n'importe quelle suite** (x_n) convergeant vers a.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La démonstration d'une condition nécessaire et suffisante comporte toujours deux parties. La condition suffisante est démontré dans le document référencé. Nous allons montrer que la condition est nécessaire. Supposons donc que

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Cela s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in V, \quad (0 < |x - a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon). \tag{4.1.7}$$

Soit maintenant, (x_n) une suite convergeant vers a, vérifiant en outre $x_n \neq a$. Cela s'explicite en

$$\forall \eta > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N) \Rightarrow (0 < |x_n - a| < \eta). \tag{4.1.8}$$

En regroupant (4.1.7) et (4.1.8), nous voyons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N) \Rightarrow (|f(x_n) - l| < \varepsilon).$$

ce qui montre bien que, quelle que soit la suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers l.

Le théorème nous donne un moyen de démontrer que $f(x)$ n'admet pas de limite en a : il suffit en effet d'exhiber *une* suite (x_n) qui tend vers a et telle que $f(x_n)$ ne converge pas. De même, si l'on exhibe *une* suite (x_n) qui tend vers a et telle que $f(x_n)$ ne tend pas vers l, alors f ne tend pas vers l quand x tend vers a.
On a des caractérisations analogues pour les limites à droite (ou à gauche) et les limites à l'infini de f :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette une **limite à droite** de a égale à l est que, quelle que soit la suite (x_n), si $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et $x_n > a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

- Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette une limite égale à l quand x tend vers $+\infty$ est que, quelle que soit la suite (x_n) tendant vers $+\infty$, on ait $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

Proposition 4.1.2. *La limite d'une fonction en un point, si elle existe, est unique.*

Démonstration - Supposons qu'il existe deux limites l et $\hat{l}$ et soit une suite quelconque (x_n) qui tend vers a. Le théorème précédent dit que la suite $f(x_n)$ tend vers l et vers $\hat{l}$. Nous savons que c'est impossible puisque nous avons démontré que la limite d'une suite est unique.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.1.5 Propriétés des limites liées aux comparaisons des fonctions

Exercices :
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10

Exemples :
Exemple B.1.1

Les définitions rigoureuses sont indispensables pour montrer certaines propriétés :

Proposition 4.1.3. *Soient $a \in \mathbb{R}$, Ω un intervalle ouvert contenant a et f une fonction numérique définie sur $\Omega \backslash \{a\}$. Si f admet en a une limite $l > 0$, alors il existe un intervalle ouvert Ω' contenant a tel que :*

$$\forall x \in \Omega' \backslash \{a\},\ f(x) > 0.$$

Démonstration - On sait que $\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \Omega \ \ (0 < |x - a| < \eta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon)$$

Il suffit de choisir ε vérifiant $l - \varepsilon > 0$ alors si on définit $\Omega' = \Omega \cap]a - \eta, a + \eta[$, on obtient le résultat. Nous pouvons choisir par exemple $\varepsilon = l/2$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 4.1.4. *{**Théorèmes de comparaison**} Soit Ω un intervalle ouvert contenant a. Soient f_1, f_2, f et g des fonctions définies sur $\Omega\backslash\{a\}$.*

1. *Si*
$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta \text{ et } \ \forall x\in\Omega\backslash\{a\})\ \ f(x)\le g(x),$$
alors $\alpha\le\beta$.
2. *Si*
$$\lim_{x\to a} f_1(x)=l,\ \lim_{x\to a} f_2(x)=l \text{ et } \ \forall x\in\Omega\backslash\{a\}),\ \ f_1(x)\le f(x)\le f_2(x),$$
alors $\lim_{x\to a} f(x)=l$. Cette propriété est souvent appelée **théorème des gendarmes**.
3. *Si*
$$\lim_{x\to a} g(x)=0 \text{ et } \ \forall x\in\Omega\backslash\{a\})\ \ |f(x)|\le g(x),$$
alors $\lim_{x\to a} f(x)=0$.
4. *Si f est bornée et si $\lim_{x\to a} g(x)=0$, alors $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$.*

Démonstration -

1. On utilise le résultats sur les suites : quelle que soit la suite (x_n) convergeant vers a, telle que $x_n\in\Omega\backslash\{a\}$, les deux suites $(f(x_n))$ et $(g(x_n))$ sont convergentes respectivement vers α et β, et vérifient $f(x_n)\le g(x_n)$. Le résultat sur la comparaison des limites des suites permet de conclure.

   Attention! Même si $f(x)<g(x)$, $\forall x\in\Omega\backslash\{a\}$, on a encore $\alpha\le\beta$. Par exemple, nous avons vu que pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $\dfrac{\sin x}{x}<1$. Lorsque l'on passe à la limite en 0, on obtient

Propriétés des limites liées aux comparaisons des fonctions

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

donc $1 \leq 1$ **et non pas** $1 < 1$. Le passage à la limite ne conserve pas l'inégalité stricte.

2. Quelle que soit la suite (x_n) convergeant vers a, telle que $x_n \in \Omega \backslash \{a\}$, on doit montrer que $f(x_n)$ converge vers l.

   Pour ce faire on utilise les propriétés suivantes

$$x_n \in \Omega \backslash \{a\} \Rightarrow f_1(x_n) \leq f(x_n) \leq f_2(x_n)$$

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = l \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_1(x_n) = l$$

$$\lim_{x \to a} f_2(x) = l \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_2(x_n) = l$$

   Le théorème de comparaison des suites permet de conclure que $f(x_n)$ converge vers l.

3. On utilise le théorème des gendarmes : $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

4. On utilise le point précédent : $|f(x)g(x)| \leq M|g(x)|$.

4.1.6 Opérations sur les limites

Exercices :
Exercice A.1.11

Exemples :
Exemple B.1.2

Théorème 4.1.2. *Soient f et g définies dans un voisinage de a (sauf éventuellement en a) telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$, avec a fini, alors*

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$,
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$,
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, *sous la condition que* $\beta \neq 0$.

Ce théorème peut se généraliser au cas où x tend vers l'infini.

Démonstration - C'est une conséquence immédiate du théorème de la caractérisation des limites par les suites, puisque toutes ces propriétés ont été démontrées sur les limites des suites.

Théorème 4.1.3. *Soit* Ω *un intervalle ouvert contenant* x_0*, soit* f *définie sur* $\Omega\backslash\{x_0\}$
Soit Ω' *un intervalle ouvert contenant* y_0*, et soit* g *définie sur* Ω'*.*
On suppose

$$Im\, f \subset \Omega', \ \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \ \lim_{y\to y_0} g(y) = z_0, \ \ et \ \ g(y_0) = z_0,$$

alors

$$\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = z_0.$$

Les théorèmes précédents sont **très importants**, car ils permettent dans la pratique de ramener l'étude d'une limite à des cas déjà connus ou obtenus dans un calcul précédent, sans avoir à remonter chaque fois à la définition, avec des $\varepsilon, \eta\ldots$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.1.7 Définition des limites généralisées

Exercices :
Exercice A.1.12

Le nom abusif de "limites généralisées" concerne les fonctions qui tendent vers $\pm\infty$.

Définition 4.1.5. *Soient Ω un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de Ω et f une fonction numérique définie sur Ω sauf éventuellement en a. On dit que* ***$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a*** *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, \{(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (f(x) > A)\}. \tag{4.1.9}$$

Soit f définie sur $]\omega, +\infty[$, on dit que ***$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$*** *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \geq \omega, \ \{(x > B) \Rightarrow (f(x) > A)\}. \tag{4.1.10}$$

Il est incorrect (et dangereux) d'écrire $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ car il ne s'agit pas d'une limite dans $\mathbb{R}$ et que les propriétés sur les combinaisons de limites ne seront pas toujours valables. Aussi vaut-il mieux écrire

$$f(x) \to +\infty \text{ quand } x \to a, \qquad f(x) \to +\infty \text{ quand } x \to +\infty.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Toutefois, cet abus d'écriture est toléré quand il n'y a pas de risque d'ambiguïté dans le contexte où l'on se trouve.
Ces définitions s'étendent sans problème à $-\infty$ puisque si $f(x) \to -\infty$ alors $-f(x) \to +\infty$.

4.1.8 Opérations sur les limites généralisées

Exercices :
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Théorème 4.1.4. *Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a et telles que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.*

1. *si f est bornée au voisinage de a, alors* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$,
2. *si f est minorée au voisinage de a, alors $f(x) + g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$,*
3. *si f est minorée, au voisinage de a, par un réel strictement positif, alors $f(x)g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$,*
4. *si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ dans un voisinage de a, alors* $\dfrac{1}{f(x)} \to +\infty$ *quand $x \to a$.*

Démonstration -

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

1. On va commencer par démontrer que la fonction $\frac{1}{g(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers a, puis, ensuite, on utilisera le théorème sur le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 pour en déduire que $\frac{f(x}{g(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers a.

   Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, on définit $A' = \frac{1}{\varepsilon}$. On remarque que $A' > 0$.
   La fonction g tend vers $+\infty$ quand x tend vers a donc il existe $\eta > 0$ tel que :

   $$\left(0 < |x-a| < \eta\right) \Rightarrow \left(g(x) > A' > 0\right) \Rightarrow \left(|g(x)| = g(x) > A' > 0\right) \Rightarrow \left(0 < \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{A'} = \varepsilon\right).$$

   Donc quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que :

   $$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow \left(\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \varepsilon\right)$$

   Ceci termine de démontrer que $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$.

2. Puisque la fonction f est minorée, il existe m tel que $f(x) \geq m$ au voisinage de a. Soit A quelconque, on définit $A' = A - m$, il existe $\eta > 0$ tel que :

   $$0 < |x-a| < \eta \Rightarrow (g(x) > A' = A - m) \Rightarrow f(x) + g(x) > A - m + m = A,$$

   d'où le résultat.

3. La démonstration est très semblable à la précédente, elle est laissée en exercice.

4. On a :

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_1 > 0,\ \{(0 < |x-a| < \eta_1) \Rightarrow (|f(x)| < \varepsilon)\}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\exists \eta_2 > 0, \{(0 < |x-a| < \eta_2) \Rightarrow (f(x) > 0)\}.$$

Si on définit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a donc

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (0 < f(x) < \varepsilon) \Rightarrow \left(0 < \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{f(x)}\right).$$

Soit A quelconque.

— Si $A \leq 0$, on choisit η_2 comme précédemment, on a donc

$$(0 < |x-a| < \eta_2) \Rightarrow \left(A \leq 0 < \frac{1}{f(x)}\right).$$

— Si $A > 0$, on peut définir $\varepsilon = \dfrac{1}{A} > 0$, si on choisit η_1, η_2, η comme précédemment, on a donc

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow \left(A = \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{f(x)}\right).$$

Ceci termine de démontrer que $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a.

On doit faire bien attention aux hypothèses de la proposition 4.1.4. Les opérations

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0.\infty$$

ne sont pas licites, car peuvent donner lieu à des résultats très différents selon les cas. On dit que ce sont des ***formes indéterminées***. On verra en exercice quelques exemples d'indéterminations.

4.2 Continuité d'une fonction

4.2.1 Définition de la continuité 25
4.2.2 Continuité et limite 27
4.2.3 Opérations sur les fonctions continues 29
4.2.4 Théorème de la valeur intermédiaire 31
4.2.5 Fonctions continues sur un segment 33
4.2.6 Prolongement par continuité 35
4.2.7 Continuité uniforme 37
4.2.8 Fonctions strictement monotones 39

4.2.1 Définition de la continuité

Exercices :
Exercice A.1.16
Exercice A.1.17

Exemples :
Exemple B.1.3

Définition 4.2.1. *Soient Ω un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur Ω. On dit que f est* ***continue au point $a \in \Omega$*** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \{(|x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)\}. \tag{4.2.1}$$

On dit que f est ***continue à droite en a*** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \{(a \le x < a+\eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)\}. \tag{4.2.2}$$

On dit que f est ***continue à gauche en a*** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \{(a-\eta < x \le a) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)\}. \tag{4.2.3}$$

Enfin on dit qu'une fonction est ***continue sur Ω*** *si elle est continue en tout point de Ω.*

Dans cette définition, le nombre η dépend de ε et en général de a.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple, étudions la continuité de la fonction f définie par $f(x) = x^3$. Nous avons :

$$f(a+h) - f(a) = (a+h)^3 - a^3 = h(3a^2 + 3ah + h^2).$$

Soit $\alpha > 0$ fixé, alors pour $|h| < \alpha$, nous pouvons écrire :

$$|3a^2 + 3ah + h^2| \leq 3a^2 + 3|a|\alpha + \alpha^2$$

Soit $M = 3a^2 + 3|a|\alpha + \alpha^2$ et soit $\varepsilon > 0$ donné, alors si nous prenons $\eta = \min\{\alpha, \varepsilon/M\}$, nous déduisons de ce qui précède que :

$$(|h| < \eta) \Rightarrow (|(a+h)^3 - a^3| \leq M|h| < \varepsilon).$$

4.2.2 Continuité et limite

Exercices :
Exercice A.1.18

Proposition 4.2.1. *Une fonction f est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si f admet une limite en a égale à $f(a)$. Une fonction f est continue à gauche (resp. à droite) en a si et seulement si f admet une limite à gauche (resp. à droite) en a égale à $f(a)$.*

Démonstration - Ceci provient directement des définitions de la limite et de la continuité d'une fonction en un point. Ceci donne aussi de manière évidente les résultats suivants :

Proposition 4.2.2. *Une fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et continue à gauche en a.*

Théorème 4.2.1. *Une fonction f, définie sur un intervalle Ω, est continue au point $a \in \Omega$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de Ω convergeant vers a la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$, c'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(a). \tag{4.2.4}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On peut montrer, en utilisant ce théorème, que la fonction x^p est continue au point $a \in \mathbb{R}$. En effet, soit (x_n) une suite convergeant vers a, alors on sait que le produit des p suites (x_n) converge vers le produit des limites soit a^p et on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (x_n)^p = a^p = f(a).$$

Notons au passage que la définition rigoureuse de la fonction x^p, pour p entier naturel se fait par récurrence :

$$x^p = \begin{cases} x, & \text{lorsque } p = 1, \\ x^{p-1}x, & \text{lorsque } p > 1. \end{cases}$$

Il en va de même de la démonstration de la convergence de la suite $(x_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.2.3 Opérations sur les fonctions continues

Exercices :
Exercice A.1.19

Cours :
Continuité et limite

Les résultats de ce paragraphe se déduisent de manière immédiate des propriétés sur les limites du paragraphe référencé.

Théorème 4.2.2. *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a et continues au point a. Alors*

1. *la fonction $f+g$ est continue au point a,*
2. *pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est continue au point a,*
3. *la fonction fg est continue au point a,*
4. *si $g(a) \neq 0$, la fonction $\frac{1}{g}$ est continue au point a.*

Corollaire 4.2.1. *Si f et g sont continues sur Ω, alors $f+g$, λf, fg sont des fonctions continues sur Ω et $\frac{1}{g}$ est continue en tout point où g ne s'annule pas.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La fonction identité ($x \mapsto x$) est évidemment continue. On en déduit que les polynêomes sont des fonctions continues, les fractions rationnelles sont continues partout sauf aux points annulant le dénominateur.

Théorème 4.2.3. *Soit f une fonction définie dans un voisinage de a et continue en a. Soit g une fonction définie dans un voisinage du point $b = f(a)$ et continue en b. Alors $g \circ f$ définie dans un voisinage de a et est continue au point a.*

Démonstration - f est définie sur un voisinage de a donc il existe $\alpha > 0$ tel que f soit définie sur $]a-\alpha, a+\alpha[$.

g est définie sur un voisinage de b donc il existe $\beta > 0$ tel que g soit définie sur $]b-\beta, b+\beta[$.

D'autre part puisque f est continue en a

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, \{(|x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x)-f(a)| < \beta)\}.$$

Posons $\alpha_0 = \min(\alpha, \eta)$, alors $\forall x \in]a-\alpha_0, a+\alpha_0[$, $|f(x)-f(a)| < \beta$ donc $f(x) \in]b-\beta, b+\beta[$ donc $g \circ f$ est définie pour tout x appartenant à $]a-\alpha_0, a+\alpha_0[$.

Pour montrer que $g \circ f$ est continue, il suffit alors d'utiliser le théorème (4.1.3) sur les limites.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \lim_{y \to f(a)} g(y) = g(f(a))$$

donc

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g \circ f(a).$$

Opérations sur les fonctions continues

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.2.4 Théorème de la valeur intermédiaire

Exercices :
Exercice A.1.20
Exercice A.1.21

Ce théorème formalise la propriété intuitive que lorsque l'on trace au crayon une courbe représentant une fonction continue sur un intervalle, on n'a jamais besoin de lever le crayon. Mathématiquement, cette propriété est intimement liée à la structure de $\mathbb{R}$, en particulier à la propriété de la borne supérieure.

Proposition 4.2.3. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points de I tels que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe au moins un $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration - Pour fixer les idées supposons que $f(a) < 0$ et donc $f(b) > 0$. Considérons l'ensemble

$$G = \left\{x \in [a,b];\ \ f(x) < 0\right\}.$$

G n'est pas vide (il contient au moins a), il est majoré par b, il possède donc une borne supérieure $c \leq b$. D'autre part puisque $a \in G$, $a \leq c$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En conséquence, il existe une suite (x_n) d'éléments de G telle que $x_n \to c$, et donc $f(x_n) \to f(c)$. Comme $f(x_n) < 0$, on a $f(c) \leq 0$.

Supposons que $f(c) < 0$.

Comme f est continue en c, il existe un $\eta > 0$ tel que $f(x) < 0$ si $x \in]c-\eta, c+\eta[$.

Puisque $f(b) > 0, b \notin]c-\eta, c+\eta[$, de plus $c \leq b$ donc $c+\eta \leq b$. Posons $x_0 = c + \frac{\eta}{2}$ alors $a \leq c < x_0 < c+\eta \leq b$, $f(x_0) < 0$, donc $x_0 \in G$, d'autre part $x_0 > c$, ce qui est impossible puisque c est la borne supérieure donc majorant de G, donc $f(c) = 0$.

Corollaire 4.2.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points de I tels que $a < b$. Alors, quel que soit le réel k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.*

Démonstration - Supposons $f(a) \neq f(b)$ et soit k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (si $f(a) = f(b)$, k n'existe pas). On applique la proposition précédente à la fonction $g(x) = f(x) - k$. En effet,

$$g(a)g(b) = (f(a) - k)(f(b) - k)$$

est strictement négatif, puisque k est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On peut ainsi appliquer le lemme précédent qui dit que

$$\exists c \in]a, b[: \; g(c) = 0, \quad \text{soit} \quad f(c) = k.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.2.5 Fonctions continues sur un segment

Exercices :
Exercice A.1.22

Documents :
Document C.1.2

Proposition 4.2.4. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, l'image de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Démonstration - On utilise le fait qu'un sous ensemble J de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si :

$$\forall (y_1, y_2) \in J^2, \ [y_1, y_2] \subset J.$$

Posons $J = f(I)$ et soient y_1 et y_2 deux points distincts de J, alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Comme $y_1 \neq y_2$ on a $x_1 \neq x_2$ (par définition de la notion de fonction). On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui nous dit que pour tout y strictement compris entre y_1 et y_2 il existe un x strictement compris entre x_1 et x_2 donc appartenant à I tel que $f(x) = y$, ce qui signifie bien que $y \in J$, c'est-à-dire que $[y_1, y_2] \subset J$ et donc que J est un intervalle.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème 4.2.4. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, l'ensemble $f([a, b])$ admet un plus grand élément et un plus petit élément, c'est-à-dire il existe x_1 et x_2 appartenant à $[a, b]$ tels que :*

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

La démonstration, assez technique, est donnée dans le document référencé.

Théorème 4.2.5. *Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$. Alors, l'image de $[a, b]$ par f est un segment $[\hat{a}, \hat{b}]$: $f([a, b]) = [\hat{a}, \hat{b}]$.*

Démonstration - D'après le théorème précédent, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $f([a, b]) \subset [f(x_1), f(x_2)]$.

D'après la proposition (4.2.4), l'image de l'intervalle $[a, b]$ par f est un intervalle J : $J = f([a, b])$.

$x_1 \in [a, b]$ donc $f(x_1) \in J$.

$x_2 \in [a, b]$ donc $f(x_2) \in J$.

J est un intervalle, donc $[f(x_1), f(x_2)] \subset J$.

Par double inclusion on obtient $J = [f(x_1), f(x_2)]$. Ce qui démontre que $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné. En posant $\hat{a} = f(x_1)$, $\hat{b} = f(x_2)$, on obtient le résultat annoncé.

4.2.6 Prolongement par continuité

Exercices :
Exercice A.1.23

Définition 4.2.2. - ***(Prolongement par continuité)***

Soit $a \in \Omega$, soit f une fonction définie et continue sur $\Omega \backslash \{a\}$, on suppose que $l = \lim_{x \to a} f(x)$ existe, alors on peut définir une fonction $\tilde{f}$ sur Ω par :

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega \backslash \{a\}, & \tilde{f}(x) = f(x), \\ \tilde{f}(a) = l. \end{cases}$$

*La fonction $\tilde{f}$ continue sur Ω est appelée **prolongement de f par continuité**.*

Ainsi, par exemple, la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R} \backslash 0$ et admet en 0 une limite :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On peut donc la prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier en définissant la fonction $\tilde{f}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\backslash 0, \quad \tilde{f}(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \\ \tilde{f}(0) = 1. \end{cases}$$

Par contre, la fonction $f(x) = \sin(1/x)$, définie continue sur $\mathbb{R}^*$ ne peut pas êetre prolongée par continuité en 0.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.2.7 Continuité uniforme

Cours :
Continuité - définition

Documents :
Document C.1.3

La fonction $f : x \to 1/x$ est continue sur $]0,1]$ puisque l'on a pour tout $a > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \left\{ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = \frac{|x-a|}{ax} < \varepsilon \right\}.$$

Il suffit en effet de prendre un η tel que

$$a - \eta > 0 \text{ et } \frac{\eta}{a(a-\eta)} < \varepsilon, \text{ soit } \eta < \min\left(\varepsilon \frac{a^2}{1+a\varepsilon}, a\right).$$

On voit donc que, ε étant fixé, la valeur de η décroêıt avec la valeur de a. De façon un peu imagée on peut dire que, quand a tend vers 0, la fonction $f(x)$ est de 'moins en moins continue'. Il s'agit donc d'un exemple où pour ε donné le nombre η dépend de ε, ce qui est normal, et du point a en lequel on étudie la continuité. Ce qui suit a pour objet de formaliser le cas où précisément η ne dépend pas de a.

Définition 4.2.3. *On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue est **uniformément continue** sur Ω si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega^2,\ \{(|x-y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

étudions à titre d'exemple, la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $\Omega =]a, b[$. Nous avons $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$
et pour $(x, y) \in [a, b]^2$ on a $|x + y| \leq |x| + |y| \leq M = 2\max\{|a|, |b|\}$.
Alors, pour $\varepsilon > 0$ donné, on prend $\eta = \varepsilon / M$ et on en déduit que pour $|x - y| \leq \eta$ on a :

$$|x^2 - y^2| \leq \eta |x + y| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

ce qui démontre bien la continuité uniforme.

Remarquons au passage que le raisonnement est possible car l'intervalle $]a, b[$ est borné. En particulier la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $]a, +\infty[$. Il est clair qu'une fonction uniformément continue est continue. Par contre, la réciproque est fausse en général. Le théorème suivant, que nous admettons, montre qu'elle est exacte pour des fonctions définies et continues sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Théorème 4.2.6. ***(Théorème de Heine)*** *Une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ y est uniformément continue.*

Ce théorème, très important, est faux si l'intervalle sur lequel f est définie et continue n'est pas fermé ou n'est pas borné. Par exemple, nous venons de voir que la fonction $f(x) = 1/x$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$, mais elle n'est pas uniformément continue sur cet intervalle. De même, la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.2.8 Fonctions strictement monotones

Exercices :
Exercice A.1.24

Proposition 4.2.5. *Soit f une fonction strictement croissante (resp. décroissante) définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit $J = f(I)$. Alors f est bijective de I sur J. L'application réciproque f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante) sur J.*

Démonstration -

— (i) **f bijective**. L'application f est surjective de I sur J par définition de J, on peut montrer en exercice qu'elle est injective sur I, donc elle est bijective de I sur son image J, elle admet donc une application réciproque f^{-1}.

— (ii) **Monotonie de f^{-1}**. Plaçons-nous dans le cas où f est strictement croissante, le cas décroissante se traitant de manière analogue.

On doit montrer que

$$\forall y, y' \in J, \; y > y' \Rightarrow f^{-1}(y) > f^{-1}(y'),$$

ce qui est équivalent à

$$\forall y, y' \in J, \; f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y') \Rightarrow y \leq y'.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Or f est strictement croissante donc croissante on a donc bien

$$\forall y, y' \in J,\ \ f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y') \Rightarrow f(f^{-1}(y)) \leq f(f^{-1}(y')) \Rightarrow y \leq y'.$$

Proposition 4.2.6. *Soit f une fonction continue strictement croissante (resp. décroissante) définie sur un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$, soit $\Omega' = f(\Omega)$. Alors Ω' est un intervalle ouvert.*

Démonstration - On suppose que f est strictement croissante, le cas décroissante se traite de façon analogue. Puisque f est continue, Ω' est un intervalle, montrons que c'est un intervalle ouvert

$$y_0 \in \Omega' \Rightarrow \exists x_0 \in \Omega,\ \ y_0 = f(x_0).$$

Ω est un intervalle ouvert, donc $\exists \alpha > 0,\ \ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset \Omega$.

On note

$$y_1 = f\left(x_0 - \frac{\alpha}{2}\right), y_2 = f\left(x_0 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

f est strictement croissante donc $y_1 < y_0 < y_2$.

$x_0 - \dfrac{\alpha}{2} \in \Omega$, donc $y_1 \in \Omega'$.

$x_0 + \dfrac{\alpha}{2} \in \Omega$, donc $y_2 \in \Omega'$.

Ω' est un intervalle donc $[y_1, y_2] \subset \Omega'$, donc $]y_1, y_2[\subset \Omega'$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On vient de démontrer que pour tout y_0 appartenant à Ω', il existe un intervalle ouvert $]y_1, y_2[$ tel que $y_0 \in]y_1, y_2[$ et $]y_1, y_2[\subset \Omega'$, donc Ω' est un intervalle ouvert.

Proposition 4.2.7. *Soit f une fonction définie, continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$. Soit $\Omega' = f(\Omega)$. Alors, f admet une fonction réciproque g définie, continue et strictement croissante (resp. décroissante) de Ω' sur Ω.*

Démonstration - Plaçons-nous dans le cas où f est croissante, le cas f décroissante se traitant de manière analogue.

Soit $y_0 \in \Omega'$ et x_0 l'unique élément de Ω tel que $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η tel que :

$$\forall y \in \Omega',\ (y_0 - \eta \leq y \leq y_0 + \eta) \Rightarrow (f^{-1}(y_0) - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0) + \varepsilon).$$

Or, si η est donné par

$$\eta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon),\ f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}$$

alors on a :

$$(y_0 - \eta \leq y \leq y_0 + \eta) \Rightarrow (f(x_0 - \varepsilon) \leq y \leq f(x_0 + \varepsilon)).$$

Et en appliquant f^{-1} aux trois membres de cette double inégalité, on a, grêace à la monotonie croissante de cette fonction :

$$x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon.$$

C'est le résultat désiré.

4.3 Introduction aux suites et séries de fonctions

4.3.1 Définition d'une suite ou série de fonctions 43
4.3.2 Convergence simple d'une suite ou série de fonctions 45
4.3.3 Convergence uniforme d'une suite ou série de fonctions 48

4.3.1 Définition d'une suite ou série de fonctions

Définition 4.3.1. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Une* ***suite de fonctions*** *définies sur D est la donnée pour tout entier $n \geq n_0$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé, d'une application $f_n : D \to \mathbb{R}$. On notera $(f_n)_{n \geq n_0}$ ou (f_n) cette suite de fonctions.*

Quelques exemples connus :

1. la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$,
2. la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0, +\infty[$ par $g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

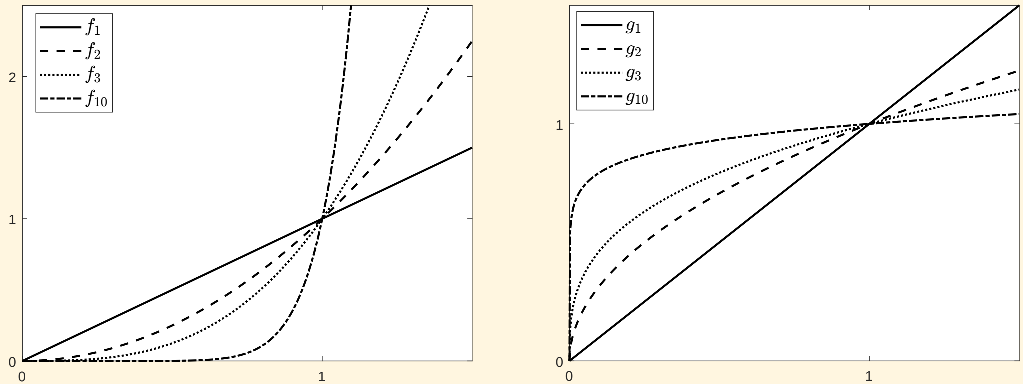
Définition 4.3.2. *Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$. On définit la* ***série de fonctions*** *de terme général f_n, notée $\sum_{n\geq 0} f_n$, la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ définie sur D par*

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

On appelle S_n la somme partielle d'ordre de n de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Un exemple connu est la suite des sommes partielles de la série géométrique définie pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$



(a) Suite (f_n) (b) Suite (g_n)

FIGURE 4.3.1 – Courbes représentatives de quelques termes des suites (f_n) et (g_n).

On a vu au chapitre 3 qu'une suite numérique peut converger (ou non) vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. De la même manière, on peut étudier la convergence d'une suite de fonctions. En effet, pour $x_0 \in D$ fixé, la suite $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ est une suite numérique dont on peut étudier la convergence avec les outils mathématiques introduits au chapitre 3 et 4 (théorème de comparaison, équivalents, composition de limites, etc $\cdots$). Il existe cependant plusieurs formes de convergence pour les suites et séries de fonctions.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

4.3.2 Convergence simple d'une suite ou série de fonctions

Exercices :
Exercice A.1.25

Définition 4.3.3. *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$. On dit que (f_n)* ***converge simplement sur*** *D si, pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente. On définit alors la fonction suivante*

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array}$$

appelée la ***limite simple*** *de (f_n).*

Définition 4.3.4 (avec quantificateurs)**.** *La suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction f sur D si et seulement si*

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big).$$

Remarque 4.3.1. Étudier la convergence simple d'une suite de fonction (f_n) revient à déterminer le plus grand sous ensemble $D' \subset D$ sur lequel (f_n) converge simplement.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple, on démontre et vérifie graphiquement que

1. la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$
2. la suite de fonction $(g_n)_{n\geq 0}$ définies par $g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction g définie par
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Dans ces deux exemples, on observe que les limites simples ne sont pas des fonctions continues sur leur domaine de définition bien que chaque fonction de la suite (f_n) le soit. La convergence simple n'est donc pas suffisante pour s'assurer qu'une propriété satisfaite par les fonctions f_n, le soit aussi par leur limite simple f. Cela nous amène à définir une notion plus forte, la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

Définition 4.3.5. *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $\sum_{n\geq n_0} f_n$* ***converge simplement sur*** *D si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur D. On définit alors la fonction suivante*

$$\begin{array}{rccl} S: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} f_k(x) = \sum\limits_{n\geq n_0} f_n(x). \end{array}$$

Convergence simple d'une suite ou série de fonctions

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple la suite des sommes partielles de la série géométrique converge simplement vers la fonction définie sur $D =]-1, 1[$ par

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

4.3.3 Convergence uniforme d'une suite ou série de fonctions

Exercices :
Exercice A.1.26
Exercice A.1.27

Définition 4.3.6 (avec quantificateurs)**.** *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies et bornées sur une partie* D *non vide de* $\mathbb{R}$*. On dit que la suite* (f_n) *converge uniformément sur* D *vers la fonction* f *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,\ \big(n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big).$$

En utilisant la caractérisation de la borne sup, la définition se reformule et se démontre en pratique à l'aide du théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *Soient* $(f_n)_{n\geq n_0}$ *une suite de fonctions définies et bornées sur une partie* D *non vide de* $\mathbb{R}$*. Pour tout entier* $n \geq n_0$*, on pose* $u_n = \sup\big\{|f_n(x) - f(x)|;\ x \in D\big\}$*. La suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* D *si et seulement si*

1. *la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est bien définie dans* $\mathbb{R}$*,*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarque 4.3.2. La détermination de la suite (u_n) s'effectue en général en dressant le tableau de variations des quantités $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ sur D. Une alternative équivalente à la définition est de remplacer la notion de borne supérieure par celle de majorant :

$$(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \quad \Leftrightarrow \quad \exists (v_n)_{n \geq n_0}, \left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq n_0, \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0. \end{array} \right.$$

Théorème 4.3.2 (interversion des limites)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ et Ω un voisinage de a dans $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $D = \Omega \setminus \{a\}$. On suppose que*

- *la suite (f_n) converge uniformément sur D vers une fonction f,*
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \ell_n \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \ell_n$.

Alors,

1. $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$,
2. *La suite (ℓ_n) converge vers ℓ.*

Ce résultat reste valable pour les limites finies quand $x \to \pm\infty$ et pour les limites généralisées.

Théorème 4.3.3 (continuité de la limite simple)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur D vers une fonction f. Alors la fonction f est elle-même définie et continue sur D.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La convergence uniforme de la suite des sommes partielles (S_n) d'une série de fonction $\sum_{n\geq n_0} f_n$ peut être difficile à démontrer à l'aide du théorème 4.3.1. Celle-ci n'est pas équivalente à la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Définition 4.3.7. *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonction convergeant uniformément sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ vers la fonction identiquement nulle. Pour tout entier $n \geq n_0$, on pose $u_n =$* $\sup\{|f_n(x)|;\ x \in D\}$.
*On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} f_n$ **converge normalement sur** D si la série numérique $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.*

Théorème 4.3.4. *La convergence normale entraîne la convergence uniforme.*

Démonstration - laissée en exercice à l'aide d'inégalités triangulaires.

Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple sur $D =]-1,1]$. Cependant, cette même suite (f_n) converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur tout intervalle fermé borné $[a,b]$ avec $-1 < a < b < 1$. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \max\left(|a|^n, |b|^n\right).$$

On pose alors $u_n = \max(|a|^n, |b|^n)$. Sachant que $|a| < 1$ et $|b| < 1$, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série de terme général f_n converge également uniformément sur $[a,b]$. Il suffit de démontrer

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$: on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = \max\left(\sum_{k=0}^{n} |a|^k, \sum_{k=0}^{n} |b|^k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \max\left(\frac{1}{1-|a|}, \frac{1}{1-|b|}\right).$$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge donc la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Remarque 4.3.3. La réciproque du théorème 4.3.4 est fausse et illustrée dans l'exercice référencé A.1.27.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre 4 54
A.2 Exercices de TD 82

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.1 Exercices du chapitre 4

A.1.1 Ch4-Exercice1 . . . 55
A.1.2 Ch4-Exercice2 . . . 56
A.1.3 Ch4-Exercice3 . . . 57
A.1.4 Ch4-Exercice4 . . . 58
A.1.5 Ch4-Exercice5 . . . 59
A.1.6 Ch4-Exercice6 . . . 60
A.1.7 Ch4-Exercice7 . . . 61
A.1.8 Ch4-Exercice8 . . . 62
A.1.9 Ch4-Exercice9 . . . 63
A.1.10 Ch4-Exercice10 . . . 64
A.1.11 Ch4-Exercice11 . . . 65
A.1.12 Ch4-Exercice12 . . . 66
A.1.13 Ch4-Exercice13 . . . 67
A.1.14 Ch4-Exercice14 . . . 68
A.1.15 Ch4-Exercice15 . . . 69
A.1.16 Ch4-Exercice16 . . . 70
A.1.17 Ch4-Exercice17 . . . 71
A.1.18 Ch4-Exercice18 . . . 72
A.1.19 Ch4-Exercice19 . . . 73
A.1.20 Ch4-Exercice20 . . . 74
A.1.21 Ch4-Exercice21 . . . 75
A.1.22 Ch4-Exercice22 . . . 76

A.1.23 Ch4-Exercice23 77
A.1.24 Ch4-Exercice24 78
A.1.25 Ch4-Exercice25 79
A.1.26 Ch4-Exercice26 80
A.1.27 Ch4-Exercice27 81

Exercice A.1.1 Ch4-Exercice1

Montrer que l'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch4-Exercice2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, montrer qu'elle admet une limite en $x = -1$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch4-Exercice3

Montrer, en utilisant la compatibilité de la multiplication avec la relation d'ordre $\leq$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x \leq \varepsilon) \iff (x^2 \leq \varepsilon^2)$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch4-Exercice4

Montrer que la fonction $x \to x^2$ admet pour limite 0 en $x = 0$.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.5 Ch4-Exercice5

On considère la fonction $x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer qu'elle admet en 0 une limite à droite égale à 1 et une limite à gauche égale à -1, mais qu'elle n'admet pas de limite en 0.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.6 Ch4-Exercice6

Montrer que f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite en a qui sont égales.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.7 Ch4-Exercice7

Soit la fonction $x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Trouver une suite (x_n) qui tend vers 0 et telle que $(f(x_n))$ ne tend par vers 1. En déduire que $\lim_{x\to 0} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ (si elle existe) est différente de 1.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch4-Exercice8

En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.9 Ch4-Exercice9

1. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et que $|f(x)| \leq g(x)$ pour $x > A > 0$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Soient trois fonctions f_1, f_2 et g telles que $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ pour $x > A > 0$. Si f_1 et f_2 ont même limite l à l'infini, montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$.
3. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x+2} = 1$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch4-Exercice10

On suppose que la fonction f est strictement négative (resp. positive) au voisinage d'un point a, quel est le signe de la limite de f au point a? Donner un exemple de chacun des cas.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch4-Exercice11

Sachant que $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$, calculer $\lim_{x \to 0} \cos x$ en utilisant la composition des fonctions.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch4-Exercice12

Montrer que $\sqrt{x} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch4-Exercice13

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a et telles que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$. Montrer que si f est minorée, au voisinage de a, par un réel strictement positif, alors $f(x)g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch4-Exercice14

Soit f telle que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ avec $l > 0$.

1. Montrer, en utilisant la définition de la limite qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x-a| < \eta$ alors $f(x) > \frac{l}{2}$.
2. On suppose que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$, montrer que $f(x)g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.
3. Montrer que les résultats précédents sont encore valables quand x tend vers l'infini.
4. Appliquer ce résultat pour calculer la limite de $\dfrac{x+1}{2x-1}e^x$ quand $x \to +\infty$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch4-Exercice15

Voici quelques exemples d'indéterminations que vous allez traiter.

($\frac{0}{0}$) Soit $f(x) = x^\alpha$, $g(x) = x^\beta$, où α et β sont deux réels positifs. Donner $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ en fonction des valeurs de α et β.

($\frac{\infty}{\infty}$) Inspirez-vous du cas ($\frac{0}{0}$) pour trouver un exemple.

($\infty - \infty$) Soit $f(x) = x$, $g(x) = x - h(x)$. Il est clair que le comportement de $(f - g)(x)$ quand $x \to +\infty$ peut êetre très différent selon celui de la fonction h. Trouver une fonction h qui tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, telle que g tend aussi vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

($0 \times \infty$) Comment peut-on se ramener à la forme ($\frac{0}{0}$) ?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch4-Exercice16

En utilisant le fait que $\sin x$ et $\cos x$ sont continues en 0, montrer que $\sin x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch4-Exercice17

écrire la définition de : f n'est pas continue au point a. Montrer alors que la fonction de Heaviside H définie par $H(x) = 0$ pour $x < 0$ et $H(x) = 1$ pour $x > 0$ n'est pas continue en 0, quelle que soit la valeur qu'on lui attribue au point $x = 0$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch4-Exercice18

Démontrer en utilisant les suites que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch4-Exercice19

Connaissant la continuité des fonctions élémentaires montrer que, par exemple, les fonctions $\sin x^p$, e^{-x^2}, $\ln(x^2+1)$, ... sont des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$. Construire des fonctions continues assez compliquées...

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch4-Exercice20

Soit $p(x)$ un polynêome de degré impair à coefficients réels. En utilisant le fait que $p(x) \to \pm\infty$ quand $x \to \pm\infty$, montrer qu'il existe a et b tels que $p(a) > 0$ et $p(b) < 0$. En déduire qu'un polynêome de degré impair a au moins une racine réelle.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch4-Exercice21

On suppose que $a \leq b$, soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans ce segment. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.22 Ch4-Exercice22

Quelle est l'image du segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $\sin x$, par $\cos x$?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch4-Exercice23

Peut-on prolonger par continuité la fonction $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0 ?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Ch4-Exercice24

Montrer que si f est une fonction strictement monotone définie sur un intervalle I, alors elle est injective.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch4-Exercice25

Étudier la convergence simple sur D des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ suivantes

1. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ avec $D = [0, +\infty[$,
2. $f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+x^2}$ avec $D =]0, +\infty[$,
3. $f_n(x) = \max(0, 1-nx)$ avec $D = [0, 1]$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch4-Exercice26

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D = [0, +\infty[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+n)^3}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.
2. Montrer que la série de terme général f_n converge sur D vers une fonction continue.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.27 Ch4-Exercice27

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D =]0, +\infty[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in D$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire que la série de terme général f_n converge uniformément sur D.
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur D.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

A.2.1 TD4-Exercice1 83
A.2.2 TD4-Exercice2 84
A.2.3 TD4-Exercice3 85
A.2.4 TD4-Exercice4 86
A.2.5 TD4-Exercice5 87
A.2.6 TD4-Exercice6 88
A.2.7 TD4-Exercice7 89
A.2.8 TD4-Exercice8 90
A.2.9 TD4-Exercice9 91
A.2.10 TD4-Exercice10 92
A.2.11 TD4-Exercice11 93
A.2.12 TD4-Exercice12 94
A.2.13 TD4-Exercice13 95
A.2.14 TD4-Exercice14 96
A.2.15 TD4-Exercice15 97
A.2.16 TD4-Exercice16 98
A.2.17 TD4-Exercice17 99
A.2.18 TD4-Exercice18 100
A.2.19 TD4-Exercice19 101

Exercice A.2.1 TD4-Exercice1

1. Montrer en utilisant les suites que les fonctions suivantes n'admettent pas de limite quand x tend vers 0.
$$f_1(x) = \sin\frac{1}{x},\ \ f_2(x) = \cos\frac{1}{x},\ \ f_3(x) = \frac{x}{|x|}\cos x$$
2. Ces fonctions admettent-elles une limite à droite ? Une limite à gauche ?

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5

Exercice A.2.2 TD4-Exercice2

étudier la limite en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$,
2. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$,
3. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$,

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD4-Exercice3

étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$ quand $x \to +\infty$
2. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ quand $x \to +\infty$
3. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ quand $x \to 0$, (poser $a = \sqrt[6]{1+x}$.)
4. $\dfrac{x}{x^2+\sin x}$ quand $x \to 0$.
5. $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}$ quand $x \to 0$.
6. $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x}$ quand $x \to 0$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1
Question 4 Aide 1
Question 5 Aide 1
Question 6 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD4-Exercice4

Préciser si les limites suivantes existent, si oui donner leur valeur.

$$i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, \qquad ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x},$$

$$iii) \quad \lim_{x\to \pm\infty} x + 2 - \sqrt{x^2+4x}, \qquad iv) \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}$$

$$v) \quad \lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{2x}}{x-2}, \qquad vi) \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}},$$

$$vii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} \qquad viii) \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}+1}{e^x - 2}$$

Réponses : $i)$ 0, $ii)$ n,
$iii)$ tend vers $-\infty$ dans un cas, admet 0 comme limite dans l'autre cas.
$iv)$ 0, $v)$ $\frac{1}{2}$, $vi)$ 1, $vii)$ $\frac{2}{3}$, $viii)$ tend vers $+\infty$.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD4-Exercice5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ telle que $\lim_{x \to a} f(x) = l$, soit g une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers a.

1. On suppose que $l > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que sur $V \setminus \{a\}$ $f(x)$ soit minorée par un minorant strictement positif.
   (b) Montrer en utilisant la définition que $f(x)g(x)$ tend vers $= +\infty$ quand x tend vers a.
2. Que se passe-t-il si $l < 0$?
3. Que se passe-t-il si $l = 0$?

Question 1a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD4-Exercice6

E désigne la fonction partie enrière, soient a et b deux réels strictement positifs, on définit

$$f_1(x) = \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right), \; f_2(x) = \frac{b}{x}E\left(\frac{x}{a}\right).$$

1. Est-ce que f_1 admet une limite quand x tend vers 0 ? Si oui, laquelle ?
2. Est-ce que f_2 admet une limite quand x tend vers 0 ? Si oui, laquelle ?

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.7 TD4-Exercice7

Soit $f(x) = \dfrac{x}{1 - x + \dfrac{|x|}{x}}$, étudier la limite de f en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

Aide 1

Exercice A.2.8 TD4-Exercice8

1. Montrer que si f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ admet une limite en x_0, alors la fonction $|f|$ admet une limite en x_0. Laquelle ?
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1

Exercice A.2.9 TD4-Exercice9

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle. En déduire que tout polynêome de degré impair admet au moins une racine réelle.

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD4-Exercice10

1. Soit a un nombre réel, montrer que :

$$a = 0 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon)$$

2. Montrer que si f est une fonction périodique qui admet une limite l lorsque x tend vers $+\infty$, alors f est constante.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD4-Exercice11

Soit la fonction définie par $f(x) = e^x$.

1. Montrer en utilisant la définition que la fonction f est continue en 0. Faire une figure.
2. Montrer en utilisant la définition que la fonction f est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.12 TD4-Exercice12

1. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application continue, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution (au moins). Cette solution est-elle unique ?
2. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application continue qui vérifie :

   $$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|.$$

   Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique.
3. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application continue et décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.
4. Soit $f : [a,+\infty[\to [a,+\infty[$ une application continue, est-ce que l'équation $f(x) = x$ admet une solution ?

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13 TD4-Exercice13

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue et α et β deux réels strictement positifs, montrer qu'il existe c appartenant à $[a, b]$ tel que

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c).$$

Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.14 TD4-Exercice14

Montrer qu'une application continue et périodique est bornée.

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6

Exercice A.2.15 TD4-Exercice15

On suppose $a < b$.

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, on suppose qu'il existe x_1, x_2, x_3 tels que

$$a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b, \;\; f(x_1) < f(x_2), \;\; f(x_3) < f(x_2).$$

   On pose

$$y = \max(f(x_1), f(x_3)), \;\; y_2 = \frac{y + f(x_2)}{2}.$$

   (a) Montrer que $y_2 \in]f(x_1), f(x_2)[, \;\; y_2 \in]f(x_3), f(x_2)[$.

   (b) En déduire que f n'est pas injective.

   (c) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, on suppose qu'il existe x_1, x_2, x_3 tels que

$$a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b, \;\; f(x_1) > f(x_2), \;\; f(x_3) > f(x_2).$$

   Montrer que f n'est pas injective, on pourra utiliser la fonction $-f$.

2. (a) Utiliser ce qui précède pour montrer qu'une fonction continue sur $[a, b]$ qui n'est pas strictement monotone n'est pas injective.

   (b) Soit f une fonction définie et injective sur $[a, b]$, est-ce que f est strictement monotone ?

   (c) Soit f une fonction définie et strictement monotone sur $[a, b]$, est-ce que f est injective ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16 TD4-Exercice16

Soit la fonction définie par $f(x) = e^x$.

1. Montrer en utilisant la définition que la fonction f est uniformément continue sur $[0,1]$.
2. (a) Ecrire la proposition P : " f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ".
   (b) Ecrire non P.
   (c) Soit $\eta > 0$, on définit $x_2 = x_1 + \frac{\eta}{2}$, quelle valeur faut-il donner à x_1 pour que $|e^{x_1} - e^{x_2}| = 1$?
   (d) En déduire que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.17 TD4-Exercice17

Pour chacune des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $D=[0,1]$ suivantes :

$$(i)\ f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq \frac{n-1}{n+1} \\ (n+1)x-n+1 & \text{si } \frac{n-1}{n+1}\leq x\leq \frac{n}{n+1} \\ n+1-(n+1)x & \text{si } x\geq \frac{n}{n+1} \end{cases} \qquad (ii)\ f_n(x)=\min\left(x^n\,,\,(1-x)^n\right).$$

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2 et f_3.
2. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction limite f à préciser.
3. Indiquer si la convergence est uniforme. Si oui, le démonter.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.18 TD4-Exercice18

Étudier la convergence simple des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $D = \mathbb{R}$ suivantes :

$$(i)\ f_n(x) = \frac{x+n}{\sqrt{(nx)^2+1}}, \qquad (ii)\ f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| = 1 \\ \dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}-1} \text{ si } |x| \neq 1. \end{cases}$$

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.19 TD4-Exercice19

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $D = [0,1]$ suivantes :

$$(i)\ f_n(x) = \begin{cases} n^2x \ \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2x \ \text{ si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 \ \text{ si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad (ii)\ f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{x^2}{n} E\left(\dfrac{n}{x}\right) \text{ si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre 4 103

B.1 Exemples du chapitre 4

B.1.1 Application du théorème des gendarmes 104
B.1.2 Exemple de composition de limites 107
B.1.3 Exemple de continuité 108

Exemple B.1.1 Application du théorème des gendarmes

étudions la limite de :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{quand} \quad x \to 0.$$

Nous allons montrer par des considérations géométriques élémentaires que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}) \Rightarrow (\sin x < x < \tan x).$$

Soit donc le cercle trigonométrique (voir la figure (B.1.1)). Il coupe le demi-axe des x positifs au point A. Soit B le point de ce cercle correspondant à l'angle θ. Notons H sa projection sur l'axe des x. Notons C l'intersection de la droite $x = 1$ avec la droite portant OB. Nous savons, que par définition, $OH = \cos\theta$, $HB = \sin\theta$, $AC = \tan\theta$.

1. Nous voyons sur la figure que :

$$|HB| < |AB| < |\text{arc}\, AB|, \text{ d'où } \sin\theta < \theta.$$

2. Nous voyons aussi sur la figure que l'aire du triangle curviligne OAB est inférieure à l'aire du triangle OAC, ce qui donne :

$$\pi \frac{\theta}{2\pi} < \frac{1}{2}\tan\theta, \text{ soit } \theta < \tan\theta.$$

Notons au passage, que le théorème de Thalès, nous permet de retrouver tout de suite que $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$.

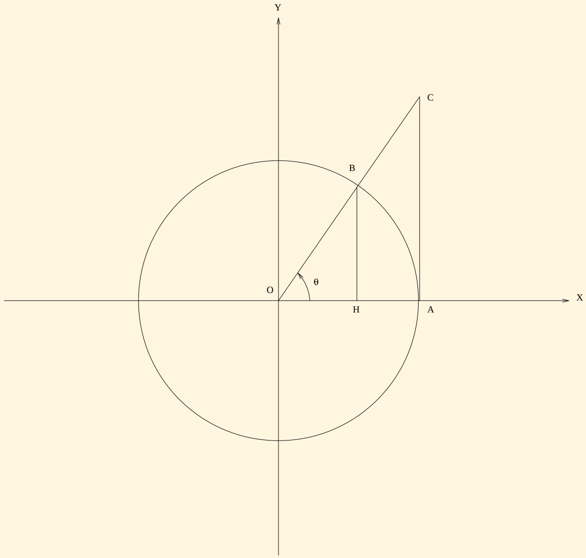


FIGURE B.1.1 – $\sin\theta < \theta < \tan\theta$

Notons aussi qu'une autre démonstration des deux inégalités ci-dessus consiste à étudier les variations des fonctions $x - \sin x$ et $\tan x - x$.

Nous en déduisons que :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Comme $\cos x \to 1$ quand $x \to 0$, on obtient finalement en appliquant la proposition 4.1.4, et en remarquant que la fonction f est paire :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.2 Exemple de composition de limites

On peut déduire la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ du résultat démontré dans l'exemple B.1.1. Pour cela on écrit $\cos x = 1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$, ce qui permet d'écrire f sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

En considérant la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ et en utilisant le résultat sur la composition des limites, on obtient

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \to 1 \text{ quand } x \to 0.$$

Le produit des limites donne donc

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2} \text{ quand } x \to 0.$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple B.1.3 Exemple de continuité

Soient $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a \neq 0$. Montrons que f est continue en a. On a

$$|f(a+h) - f(a)| = \left|\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|h|}{|a(a+h)|}.$$

1. Supposons a strictement positif. Alors il existe un réel α tel que $0 < \alpha < a$ et :

   $$(-\alpha < h < \alpha) \Rightarrow (a + h > a - \alpha > 0).$$

   Posons $M = a(a-\alpha)$ et soit $\varepsilon > 0$ donné, alors en prenant $\eta = \min\{\alpha, M\varepsilon\}$ on déduit que :

   $$(|h| < \eta) \Rightarrow (|f(a+h) - f(a)| = \frac{|h|}{M} < \frac{\eta}{M})$$

   et donc $|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon$.
2. Mêeme raisonnement pour $a < 0$.

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre 4 110

C.1 Documents du chapitre 4

C.1.1 Caractérisation de la limite par les suites - condition suffisante . . 111
C.1.2 Image d'un segment par une fonction continue 113
C.1.3 Démonstration du théorème de Heine 115

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.1 Caractérisation de la limite par les suites - condition suffisante

Théorème C.1.1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur un voisinage de a. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ tende vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a est que, quelle que soit la suite (x_n) convergeant vers a, $x_n \neq a$, la suite $(f(x_n))$ converge vers l.*

Démonstration - La démonstration de la condition nécessaire est dans le cours. Montrons que la condition est suffisante. La démonstration est a priori plus difficile dans ce sens que dans l'autre, parce que cette fois ci, il faut passer d'une convergence discrète à une convergence continue. C'est pourquoi, nous allons passer par la contraposée. Plus précisément, au lieu de montrer que

$$\left\{\forall (x_n),\ \{(x_n) \to a\} \Rightarrow \left\{(f(x_n)) \to l\right\}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = l,$$

nous allons montrer la contraposée

$$\textbf{non}\left\{\lim_{x \to a} f(x) = l\right\} \Longrightarrow \textbf{non}\left\{\forall (x_n),\ \{(x_n) \to a\} \Rightarrow \left\{(f(x_n)) \to l\right\}\right\}.$$

L'intérêêt de ce choix, c'est de permettre de passer de $x \to a$ à $x_n \to a$.

écrivons donc **non** $\left\{\lim_{x \to a} f(x) = l\right\}$. La négation s'explicite en

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}, \quad (0 < |x - a| < \eta)\ \textbf{et}\ (|f(x) - l| \geq \varepsilon). \tag{C.1.1}$$

Nous voulons montrer que cela implique

$$\textbf{non}\ \left\{\forall (x_n),\ \{(x_n) \to a\}\ \Rightarrow \left\{(f(x_n)) \to l\right\}\right\},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui s'explicite en

$$\exists (x_n),\ \{(x_n) \to a)\}\ \textbf{et non}\ \left\{(f(x_n)) \to l\right\}. \tag{C.1.2}$$

Pour ce faire, il nous suffit d'exhiber une suite pour laquelle (C.1.2) est vraie. Nous allons la construire, en particularisant le η de (C.1.1). Plus précisément nous allons écrire (C.1.1) pour une suite de valeurs de η tendant vers 0, par exemple pour la suite $\eta_n = 1/n$. Nous obtenons ainsi

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta_n > 0,\ \exists x_n \in \mathbb{R}, \quad (0 < |x_n - a| < \eta_n)\ \textbf{et}\ (|f(x_n) - l| \geq \varepsilon).$$

ou encore de manière équivalente

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_*,\ \exists x_n \in \mathbb{R}, \quad (0 < |x_n - a| < \frac{1}{n})\ \textbf{et}\ (|f(x_n) - l| \geq \varepsilon).$$

ce qui interdit à la suite $(f(x_n))$ ainsi construite de converger vers l, bien que la suite (x_n) correspondante converge vers a.

Nous avons donc bien montré la contraposée et donc que la condition est suffisante.

Retour au cours

Document C.1.1
Caractérisation de la limite par les suites - condition suffisante

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Image d'un segment par une fonction continue

Théorème C.1.2. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire il existe x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que*

$$\forall x \in [a, b],\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Démonstration - 1/ Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$A_r = \left\{x \in [a, b] \mid f(x) \geq r\right\}$$

ne soit pas vide. Il existe de telles valeurs de r, par exemple $r = f(a)$. Comme A_r est une partie de $[a, b]$, A_r est majoré. Il admet donc une borne supérieure $s_r = \sup A_r$. Mais alors

$$\forall n \geq 1, \exists x_n \in A_r \subset [a, b] \ :\ s_r - \frac{1}{n} < x_n \leq s_r,$$

de sorte que cette suite (x_n) converge vers s_r. Mais comme tous les x_n appartiennent à l'intervalle $[a, b]$, on a à la limite $a \leq s_r \leq b$. Comme d'autre part les x_n appartiennent à A_r on a $f(x_n) \geq r$, d'où à la limite $f(s_r) \geq r$, ce qui montre que s_r appartient à A_r.

Supposons maintenant que f ne soit pas majorée, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in [a, b] \ :\ f(x) \geq n.$$

Mais alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \left\{x \in [a, b] \mid f(x) \geq n\right\}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

est non vide. Comme

$$(f(x) \geq n+1) \Rightarrow (f(x) \geq n)$$

on a $A_{n+1} \subset A_n$. Ainsi s_n majore A_{n+1}, d'où $s_{n+1} \leq s_n$, de sorte que la suite s_n est décroissante et minorée par a : elle est donc convergente. Soit l sa limite.

Comme s_n appartient à $[a,b]$ où f est continue, $f(s_n)$ converge vers $f(l)$. Comme d'autre part par définition des A_n, on a $f(s_n) \geq n$, on aboutit à une contradiction. Nous avons ainsi montré que f est majorée. On montre qu'elle est minorée en appliquant le résultat précédent à $-f$.

2/ Soient donc m et M les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $\{f(x), x \in [a,b]\}$ (on les appelle simplement bornes inférieure et supérieure de f sur $[a,b]$). Il ne reste plus qu'à montrer que m et M sont atteintes.

Supposons que ce ne soit pas le cas. On aurait alors, pour tout x de $[a,b]$, $f(x) < M$. Soit alors g la fonction

$$g : [a,b] \mapsto \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Cette fonction est bien définie sur $[a,b]$ et continue. Elle est donc majorée. Soit K un majorant de g et soit $(y_n = f(x_n))$ une suite de $f([a,b])$ convergeant vers M. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M$$

de sorte que la suite $(g(x_n))$ ne peut pas êetre bornée, ce qui contredit $g(x) \leq K$.

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Démonstration du théorème de Heine

Le but de ce document est de démontrer le :

Théorème C.1.3. ***(Théorème de Heine)*** *Une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ y est uniformément continue.*

Pour démontrer ce théorème nous aurons recours au lemme ci-dessous qui est d'ailleurs intéressant en lui-mêeme :

Lemme C.1.1. *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration du lemme - Soit donc (u_n) une suite bornée. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des éléments de cette suite étant borné, admet une borne supérieure L. Cette borne supérieure étant le plus petit des majorants, nous avons :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad L - \varepsilon < u_N \leq L. \tag{C.1.3}$$

Nous allons construire une sous-suite de (u_n) à partir de cette propriété. Choisissons pour tout $q = 0, 1, \ldots$ $\varepsilon_q = 1/q$. Alors (C.1.3) se réécrit :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \exists N_q \in \mathbb{N}, \quad L - \frac{1}{q} < u_{N_q} \leq L.$$

Ainsi, la suite $(u_{N_q})_{q\in\mathbb{N}}$, est effectivement extraite de la suite (u_n) et converge vers L.

Démonstration du théorème -

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Soit donc f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que cette fonction ne soit pas uniformément continue. Alors la négation de :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,b],\ \forall y \in [a,b], \\ (|x-y| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon) \end{cases}$$

s'écrit :

$$\begin{cases} \exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta \in \mathbb{R},\ \exists x \in [a,b],\ \exists y \in [a,b], \\ (|x-y| \leq \eta)\ \textbf{et}\ (|f(x)-f(y)| > \varepsilon) \end{cases}$$

Prenons maintenant, pour $q = 1, 2, \ldots$, $\eta_q = 1/q$. Il vient :

$$\begin{cases} \exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta_q \in \mathbb{R},\ \exists x_q \in [a,b],\ \exists y_q \in [a,b], \\ (|x_q - y_q| \leq \eta_q)\ \textbf{et}\ (|f(x_q)-f(y_q)| > \varepsilon) \end{cases} \tag{C.1.4}$$

Or, les suites (x_q) et (y_q) ainsi construites sont des suites d'éléments de $[a,b]$. Elles sont donc bornées. D'après le lemme précédent, nous pouvons extraire de chacune d'elles un sous-suite convergente. Soient c et d les limites respectives de ces sous suites extraites. Comme l'intervalle $[a,b]$ est fermé, c et d apprtiennent à cet intervalle. En notant (x'_q) et (y'_q) les sous-suites extraites, nous avons :

$$\lim_{q\to+\infty} x'_q = c, \qquad \lim_{q\to+\infty} y'_q = d.$$

Mais alors du fait de la continuité de f en c et d, nous avons :

$$\lim_{q\to+\infty} f(x'_q) = f(c), \qquad \lim_{q\to+\infty} f(y'_q) = f(d).$$

Maintenant, nous voyons que (C.1.4) implique contradictoirement que

$$c = d \qquad \text{et} \qquad f(c) \neq f(d),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui est impossible.

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

C

Continuité - définition **25**
Continuité et limite **27**
Continuité uniforme **37**
Convergence simple **45**, **48**

D

Définition **43**

F

Fonctions continues - image d'un segment . . **33**
Fonctions continues - opérations **29**
Fonctions strictement monotones **39**

L

Limite - comparaison des fonctions **14**
Limite - lien avec les suites **11**
Limite -définition **6**
Limites - opérations **17**
Limites généralisées - définition **19**
Limites généralisées - opérations **21**
Limites à droite, à l'infini **9**

P

Prolongement **35**

V

Valeur intermédiaire - théorème **31**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Voisinage d'un réel **4**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice A.1.1

Soient $(\mathcal{V}_{k=1,\ldots,p})$ p voisinages de a. Alors, par définition, il existe $\alpha_k > 0$ tel que $]a-\alpha_k, a+\alpha_k[\subset \mathcal{V}_k$. L'intersection des p voisinages contient l'intersection des p intervalles $]a-\alpha_k, a+\alpha_k[$ qui est aussi un intervalle ouvert $]a-\alpha, a+\alpha[$ où

$$\alpha = \min_{k=1,\ldots,p} \{\alpha_k\}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

Celle limite est $l = -2$, puisque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \varepsilon,\ (0 < |x+1| < \eta) \Rightarrow (|f(x)+2| < \varepsilon)$$

En effet, x étant différent de -1, on peut simplifier f et obtenir $f(x) = (x-1)$, donc $|f(x)+2| = |x+1|$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

La relation de compatibilité de la multiplication avec la relation d'ordre s'écrit :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall c \in \mathbb{R}^+,\ (a \leq b) \implies (ac \leq bc) \tag{C.1.5}$$

1. Soient donc x et ε, deux éléments de $\mathbb{R}^+$,tels que $x \leq \varepsilon$, alors :

   $$0 \times x \leq x \times x \leq x \times \varepsilon \leq \varepsilon \times \varepsilon,.$$

   soit effectivement $0 \leq x^2 \leq \varepsilon^2$, ce qui montre que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x \leq \varepsilon) \implies (x^2 \leq \varepsilon^2) \tag{C.1.6}$$

2. Soit maintenant x et ε deux éléments de $\mathbb{R}^+$ tels que $x^2 \leq \varepsilon^2$.
   Par passage à la contraposée, (C.1.6) s'écrit aussi :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 > \varepsilon^2) \implies (x > \varepsilon)$$

   Mais comme x et ε jouent le mêeme rêole, nous avons aussi, de manière équivalente :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 < \varepsilon^2) \implies (x < \varepsilon)$$

   D'autre part :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 = \varepsilon^2) \iff \{(x - \varepsilon)(x + \varepsilon) = 0\} \iff (x = \varepsilon)$$

   de sorte que nous arrivons à :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 \leq \varepsilon^2) \implies (x \leq \varepsilon)$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

En effet, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \sqrt{\varepsilon},\ (0 < |x| < \eta) \Rightarrow (|x^2| < \varepsilon),$$

puisque $x^2 < \eta^2\ (= \varepsilon)$.

Retour à l'exercice ▲

Pour $x > 0$, on a $x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+x^2}$ qui tend vers 1 quand x tend vers 0 puisque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta,\ (0 < x < \eta) \Rightarrow (\sqrt{1+x^2} - 1 < \varepsilon),$$

on peut choisir $\eta = \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 1}$. En effet, puisque $x > 0$, on a (voir l'exercice A.1.3 :

$$(\sqrt{1+x^2} - 1 < \varepsilon) \Leftrightarrow (x^2 < (1+\varepsilon)^2 - 1) \Leftrightarrow (x < \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 1}).$$

Faire le même raisonnement pour $x < 0$ avec la différence que $x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1+x^2}$ qui tend vers -1 quand x tend vers 0.

f n'admet pas de limite en 0 puisque la limite à droite est différente de la limite à gauche.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

1. Si f admet une limite l en a, alors l est limite à gauche et limite à droite en a.
2. Réciproquement, écrivons que $f(a+0) = f(a-0) = l$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_1,\ (a < x < a+\eta_1) \Rightarrow (|f(x)-l| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_2,\ (a-\eta_2 < x < a) \Rightarrow (|f(x)-l| < \varepsilon).$$

Il suffit alors de prendre $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ pour montrer que f admet une limite en a égale à l.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

Soit la suite $x_n = -\frac{1}{n}$, alors cette suite tend vers 0 et la suite $f(x_n) = -\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ tend vers -1. D'où la limite en 0 ne peut êetre égale à 1 puisque l'on a exhibé une suite (x_n) qui tend vers 0 alors que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers 1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

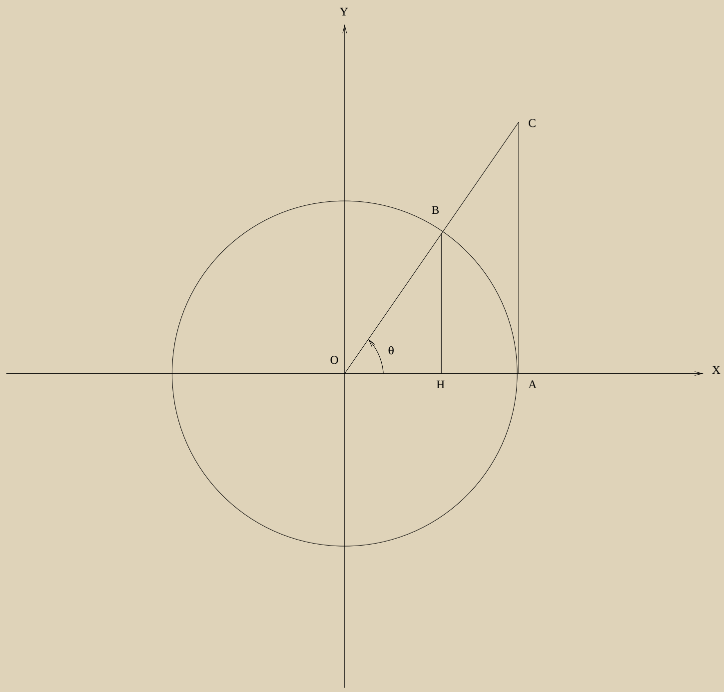


FIGURE C.1.1 – longueur d'arc et sinus

Si l'on regarde (voir la figure (C.1.1)). sur un graphique la longueur d'arc de cercle (de rayon 1) correspondant à un angle au centre θ (exprimé en radian), on a, pour $\theta \in [0, \pi/2]$: $0 \leq \sin\theta \leq \theta$. Si l'on fait tendre θ vers $0+$, alors $\sin\theta$ tend vers 0. Si maintenant on prend $\theta \in [-\pi/2, 0]$, alors on a $\theta \leq \sin\theta \leq 0$ et si l'on fait tendre θ vers $0-$, alors $\sin\theta$ tend vers 0. La fonction $\sin\theta$ ayant une limite à droite égale à la limite à gauche en 0, sa limite en 0 est égale à 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

1. écrivons que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors :
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ (x > B) \Rightarrow (g(x) < \varepsilon).$$
Or pour $x > A > 0$, on a $|f(x)| \leq g(x)$, donc
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists C = \max\{A, B\} > 0,\ (x > C) \Rightarrow (|f(x)| < \varepsilon).$$

2. De mêeme que pour la première question on refait les démonstrations du théorème de comparaison 4.1.4 en remplaçant $\exists\eta$ par $\exists B > 0$ et $0 < |x - a| < \eta$ par $x > B$.

3. Pour $x > 0$, on a $0 < \dfrac{x+3}{x+2} - 1 = \dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{1}{x}$, et puisque $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} (\dfrac{x+3}{x+2} - 1) = 0$ soit $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x+2} = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

Puisque $f(x) < 0$ (resp. $f(x) > 0$) au voisinage de a, en appliquant le résultat sur la comparaison des limites, on obtient $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$).

Par exemple $\sqrt{|x|} > 0$ (resp. $-\sqrt{|x|} < 0$) pour tout x, donc évidemment dans un voisinage de 0, et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{|x|} = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to 0} -\sqrt{|x|} = 0$).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} 1 - y^2 = 1$ et que $\lim\limits_{z\to 1} \sqrt{z} = 1$ en composant toutes ces fonctions et en appliquant le théorème sur la composition des limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-\sin^2 x} = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

La fonction racine carrée est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc quel que soit le réel A, si $x > A^2$ alors $\sqrt{x} > \sqrt{A^2} = |A|$.

Or on a toujours $|A| \geq A$ donc $\sqrt{x} > A$.

On a donc montré que quel que soit A il existe $B = A^2$ tel que $\{(x > B) \Rightarrow (f(x) > A)\}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

f est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a, donc

$$\exists m > 0,\ \exists \eta_1 > 0, \{x \in]a-\eta_1, a+\eta_1[\Rightarrow f(x) > m > 0\}.$$

D'autre part $g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$, donc :

$$\forall A' \in \mathbb{R},\ \exists \eta_2 > 0,\ (0 < |x-a| < \eta_2) \Rightarrow (g(x) > A'),$$

Etant donné A quelconque, on définit $A' = |A|/m$, $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ et on a alors :

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (0 < |x-a| < \eta_2) \Rightarrow (g(x) > A') \Rightarrow (f(x)g(x) > A'f(x))$$

Attention à la manipulation des inégalités, on a utilisé le fait que $f(x) > 0$.

On sait de plus que :

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (0 < |x-a| < \eta_1) \Rightarrow (f(x) > m) \Rightarrow (A'f(x) \geq A'm).$$

On a utilisé le fait que $A' \geq 0$.

On a donc

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (g(x) > A') \Rightarrow (f(x)g(x) > A'f(x)) \Rightarrow (f(x)g(x) > A'm)$$

Or $A'm = |A|$, et on toujours $|A| \geq A$, on a donc finalement :

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (f(x)g(x) > |A| \geq A)$$

ce qui termine de démontrer que $f(x)g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

1. écrivons la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = l$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ (0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon).$$

   Puique $l > 0$, on peut choisir $\varepsilon = \frac{l}{2}$, on a donc l'existence de η tel que :

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow \left(\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}\right),$$

   ce qui prouve le résultat.

2. On applique l'exercice A.1.13 puisque l'on vient de montrer que f est minorée par $\frac{l}{2} > 0$ dans un voisinage de a.
3. Les résultats précédents sont encore valables quand x tend vers l'infini. En effet on remplace $0 < |x-a| < \eta$ par $x > B$.
4. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+1/x}{2-1/x} = \frac{1}{2} (> 0)$$

   et $e^x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, d'où $\dfrac{x+1}{2x-1} e^x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

1. On a $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x^{\alpha-\beta}$, soit :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ +\infty & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$$

2. On prend $f(x) = \dfrac{1}{x^\beta}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, on fait tendre x vers 0 par valeurs supérieures, on a les mêmes résultats.
3. Il suffit de prendre $h(x) = \dfrac{x}{2}$. Par contre si l'on prend $h(x) = 1$, on ne trouve absolument pas le même résultat pour $f - g$.
4. En écrivant $f.g = \dfrac{f}{1/g}$, on voit que cette forme indéterminée peut-être ramenée à la forme $(\frac{0}{0})$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

On écrit que $\sin x = \sin((x-a)+a)$ et on utilise les relations trigonométriques

$$\sin((x-a)+a) - \sin a = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a - \sin a = \sin a(\cos(x-a)-1) + \sin(x-a)\cos a$$

et donc

$$|\sin(x-a+a) - \sin a| \leq |\sin a||\cos(x-a)-1| + |\cos a||\sin(x-a)|$$

On utilise alors le fait que $\lim\limits_{y\to 0} \sin y = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} \cos y = 1$ et on considère $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists \eta_1 > 0,\ (|y| < \eta_1) \Rightarrow (|\sin y| < \varepsilon/|\cos a|)$$

$$\exists \eta_2 > 0,\ (|y| < \eta_2) \Rightarrow (|\cos y - 1| < \varepsilon/|\sin a|)$$

Si on pose $y = x - a$ et si on prend $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, on obtient

$$|x-a| < \eta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < 2\varepsilon$$

ce qui montre la continuité de $\sin x$ au point a.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

H n'est pas continue au point a s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \eta > 0,\ \exists x \text{ tel que } (|x-a| < \eta) \textbf{ et } (|H(x) - H(a)| \geq \varepsilon)$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on choisit $\eta > 0$ quelconque.

1. Si $H(0) \geq \frac{1}{2}$, posons $x = -\frac{\eta}{2}$, alors
$$(|x| < \eta) \textbf{ et } (|H(x) - H(0)| = H(0) \geq \varepsilon)$$
2. Si $H(0) \leq \frac{1}{2}$, posons $x = \frac{\eta}{2}$, alors
$$(|x| < \eta) \textbf{ et } (|H(x) - H(0)| = 1 - H(0) \geq \varepsilon)$$

€

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

On peut prendre par exemple $x_n = \dfrac{1}{n}$. Alors $f(x_n) = 1$ et cette suite ne tend pas vers $f(0) = 0$!

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

Ce sont toutes des composées de fonctions continues ...

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

Supposons que le coefficient du plus haut degré est positif. Puisque $p(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, cela donne :

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ (x > B) \Rightarrow (p(x) > A).$$

Il existe donc au moins $b \in \mathbb{R}$ tel que $p(b) > 0$. On fait le même raisonnement en $-\infty$ et on obtient $a \in \mathbb{R}$ tel que $p(a) < 0$. Puisqu'un polynêome est une fonction continue et que $p(a)p(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $p(c) = 0$.

Refaire le raisonnement lorsque le coefficient du plus haut degré est négatif.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

Soit $g(x) = f(x) - x$, alors $g(a) = f(a) - a$ et puisque $f(x) \in [a, b]$, alors $g(a) \geq 0$, on montre de même que $g(b) \leq 0$. Si g s'annule en a ou b, alors un point fixe de f est a ou b. Si g ne s'annule ni en a ni en b, alors $g(a)g(b) < 0$ et $\exists c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$ et c est un point fixe de f.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

L'image par $\sin x$ de $[-\pi/2, +\pi/2]$ est $[-1, 1]$ et par $\cos x$ c'est $[0, 1]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

Puisque l'on a montré dans l'exemple B.1.2 que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, on peut donc prolonger cette fonction par continuité.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

Soit $x \neq y$, alors soit $x < y$ et $f(x) < f(y)$ (f est strictement croissante), soit $x > y$ et $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas on obtient $f(x) \neq f(y)$, ce qui est la définition d'une fonction injective.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

1. Pour $x = 0$, la suite $(f_n(x))$ est contante égale à 0 donc converge vers 0.
   Pour $x \neq 0$ fixé, on utilise les équivalents lorsque $n \to \infty$:
   $$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \sim \frac{nx}{nx} = 1,$$
   donc la suite $(f_n(x))$ converge vers 1.
   La suite de fonction (f_n) converge simplement sur D vers la fonction f définie par
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
2. Pour $x > 0$ fixé, on utilise les équivalents lorsque $n \to \infty$:
   $$f_n(x) = \frac{2nx^2 - 1}{nx + x^2} \sim \frac{2nx^2}{nx} = 2x,$$
   donc la suite $(f_n(x))$ converge vers $2x$.
   La suite de fonction (f_n) converge simplement sur D vers la fonction f définie par $f(x) = 2x$.
3. Ici, il faut représenter garphiquement les premiers termes de la suite.
   La suite de fonction (f_n) converge simplement sur D vers la fonction f définie par
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1]. \end{cases}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.26

1. Pour $x \in D$ fixé, on a
$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(x) + \frac{n}{(x+n)^3} = \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$
On a donc $u_n = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in D\} \leq \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence de (f_n) vers la fonction constante égale à 0 est uniforme.
2. La suite de fonction (f_n) étant continue, la suite des sommes partielles (S_n) définie pour tout $x \in D$ par
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$
est également continue (par somme finie de fonctions continues). Il suffit alors de démontrer la convergence uniforme de (S_n). Sans déterminer la limite, on sait que la suite (S_n) converge simplement vers une fonction S. Il suffit d'appliquer les règles de Riemann pour $x \in D$ fixé :
$$0 \leq S_n(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}.$$
La suite $(S_n(x))$ est une somme de terme positif donc elle est croissante. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc est elle majorée et $(S_n(x))$ aussi. On en déduit que $(S_n(x))$ converge et on note $S(x)$ sa limite.
Ensuite on majore $(S_n - S)$ indépendamment de $x \in D$ comme suit :
$$|S_n(x) - S(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$
Comme la majoration est valable pour tout $x \in D$, on a
$$\sup\{|S_n(x) - S(x)|;\ x \in D\} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \ell - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0.$$
La convergence de (S_n) vers sa limite simple S est uniforme.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

1. Effectuons le changement de variable $p = k-(n+1)$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1+p}}{x+n+1+p} = \frac{(-1)^{n+1}}{x+n+1} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2+p}}{x+n+2+p}.$$

Si n est pair, on écrit $n = 2m$ puis

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+2+p}}{x+2m+2+p} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+2+2p}}{x+2m+2+2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+2+2p+1}}{x+2m+2+2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{x+2m+2+2p} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{x+2m+2+2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{x+2m+2+2p} - \frac{1}{x+2m+2+2p+1} \geq 0.\end{aligned}$$

De même, on montre que si n est impair alors

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2+p}}{x+n+2+p} \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\text{Si } n \text{ est pair alors,} \quad -\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \leq 0$$

$$\text{Si } n \text{ est impair alors,} \quad 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'où l'inégalité en valeur absolue.

2. Pour $x>0$ fixé, on démontre que la suite des sommes partielles $(S_n(x))$ converge en montrant que les suites $(S_{2n}(x))$ et $(S_{2n+1}(x))$ sont adjacentes. On note $S(x)$ la limite (sans la déterminer).
   D'après la question **1.**, on a pour tout $x \in D$

$$|S_n(x)-S(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

   donc $\sup\{|S_n(x)-S(x)|;\ x\in D\} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence de (S_n) vers sa limite simple S est uniforme.
3. La convergence n'est pas normale car pour $u_n = \sup\{|f_n(x)|;\ x\in D\}$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge. En effet, d'après les règles de Riemann on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \geq \sum_{k=1}^{n} |f_k(1)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.1

On rappelle que si

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$$

alors pour toute suite (u_n) tendant vers 0, la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ.

On a mêeme une équivalence.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.1

Il y a deux variantes pour démontrer que f n'admet pas de limite quand x tend vers 0 :

— Démontrer la contraposée de l'implication pécédente, c'est à dire trouver une suite (u_n) qui tende vers 0, telle que la suite $(f(u_n))$ ne converge pas.

— Raisonner par l'absurde, supposer que $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$. Puis trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers 0 telles que les suites de terme général $u'_n = f(u_n)$ et $v'_n = f(v_n)$ convergent vers des limites différentes, on aurait donc ℓ égal deux valeurs différentes, ce qui est ... absurde.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.1

Pour f_3, quelle que soit la suite (u_n) qui converge vers 0, la suite $(\cos u_n)$ converge vers 1 car la fonction cos est continue en 0.

Essayer de trouver une suite (u_n) qui converge vers 0, telle que la suite de terme général $u'_n = f_3(u_n)$ converge vers 1.

Puis une autre suite (v_n) qui converge vers 0 telle que la suite de terme général $v'_n = f_3(v_n)$ converge vers $\ell \neq 1$.

Jouer sur le signe des termes des suites.

Retour à l'exercice ▲

Les suites choisies pour montrer que f_1 et f_2 n'ont pas de limite, sont des suites dont les termes sont positifs donc on peut en déduire que f_1 et f_2 n'ont pas de limite à droite.

On pourrait prendre des suites dont le termes sont négatifs (l'opposé des précédentes), on concluerait de même que f_1 et f_2 n'ont pas de limite à gauche.

Pour f_3, le résultat est différent.

Retour à l'exercice ▲

f_3 admet une limite à droite et une limite à gauche, le montrer avec les suites.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la continuité de la fonction cos.

Retour à l'exercice ▲

On peut montrer que, quelle que soit la suite (u_n) qui tend vers 0 par valeurs supérieures, la suite $(f_3(u_n))$ admet une limite qui vaut 1.

Attention, maintenant, il n'est plus question de choisir des suites particulières.

Retour à l'exercice ▲

On en déduit que f_3 admet une limite à droite qui vaut 1.

Montrer de mêeme que f_3 admet une limite à gauche qui vaut -1.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

Le sin est continu, reste borné, mais son argument (ici $\frac{1}{x}$) varie trop rapidement au voisinage de 0. On se doute que $f(x)$ n'a pas de limite en 0. Pour le montrer, il suffit de trouver une suite x_n qui tende vers 0 et telle que $f(x_n)$ n'ait pas de limite. Par exemple, $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n$ n'a évidemment pas de limite quand $n \to +\infty$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Une majoration directe donne $|f(x)| \leq |x|$.

Retour à l'exercice ▲

Une majoration directe donne $|f(x)| \leq x^2$.

Retour à l'exercice ▲

Rappel : par définition $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Factoriser les plus grandes puissances de x au numérateur et dénominateur pour obtenir

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = x^{-\frac{1}{3}} \frac{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{x}}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.3

Rappel : par définition $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Factoriser les plus grandes puissances de x au numérateur et dénominateur pour obtenir

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.3

Avec $a = 1 + x^{\frac{1}{6}}$, on obtient $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \dfrac{a^3-1}{a^2-1}$. Utiliser l'identité remarquable $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1)$ pour obtenir l'égalité

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{a^2+a+1}{a+1}$$

valable uniquement pour $a \neq 1$ (à cause de la division par $a-1$) c'est-à-dire pour $x \neq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.3

On se ramène à des limites connues, ici $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{x}{x^2+\sin x} = \frac{1}{x+\frac{\sin x}{x}}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5, Exercice A.2.3

On ne garde que des sin et des cos et on se ramène à des limites connues, ici $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{x(\frac{1-\cos x}{x^2})}{\frac{\sin x}{x}}$$

Retour à l'exercice ▲

On ne garde que des sin et des cos et on se ramène à des limites connues, ici $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x} = \frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{x\sin x} = \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}\cos^2 x}{\frac{\sin x}{x}}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.4

i) Indétermination $\frac{0}{0}$.
ii) Indétermination $\frac{0}{0}$.
iii) Quand x tend vers $-\infty$, il faut lever l'indétermination sous la racine carrée $+\infty - \infty$.
Quand x tend vers $+\infty$, il faut lever l'indétermination de l'expression elle mêeme $+\infty - \infty$.
iv) Quand x tend vers 0^-,il faut lever l'indétermination sous chacune des racines carrées $+\infty - \infty$
Ensuite quand x tend vers 0, il faut lever l'indétermination de l'expression elle mêeme $+\infty - \infty$.
v) Indétermination $\frac{0}{0}$.
vi) Indétermination $\frac{+\infty}{+\infty}$.
vii) Indétermination $\frac{0}{0}$.
viii)Indétermination $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.4

i)

$$\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \quad x \sin\frac{1}{x}.$$

ii) Utiliser la formule du binêome.

iii) $x^2 + 4x = x(x+4)$, donc quand x tend vers $-\infty$, $x^2 + 4x$ tend vers $+\infty$.

Quand x tend vers $-\infty$ l'expression $x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x}$, n'est pas indéterminée, elle tend vers $-\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, on peut utiliser l'expression conjuguée.

iv) Penser à la quantité conjuguée.

v) Mettre $\sqrt{x} - \sqrt{2}$ en facteur au numérateur et au dénominateur,

ou

mettre $x - 2$ en facteur au numérateur et au dénominateur (en multipliant par la quantité conjuguée).

Dans les deux cas simplifier par le terme qui tend vers 0.

vi) Mettre $\sqrt{x}$ en facteur au dénominateur.

vii) Ecrire la tangente à l'aide de cos et sin, puis utiliser le résultat classique $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

On peut également utiliser les formules trigonométriques et simplifier par $\sin x$, mais c'est beaucoup plus long.

viii) Mettre l'exponentielle en facteur.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.5

S'inspirer de la démonstration du théorème qui montre que si $l > 0$, alors il existe une voisinage de a tel que f soit strictement positive sur ce voisinage (privé de a).

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.5

Ecrire la définition de $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Retour à l'exercice ▲

$l > 0$, on peut choisir par exemple $\epsilon = l/2$.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire la définition de $f(x)g(x)$ tend vers $= +\infty$ quand x tend vers a.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.5

Soit $A > 0$, alors $A' = \frac{2A}{l} > 0$, alors

$$\exists \eta_2 > 0 \quad (0 < |x - a| < \eta_2 \Rightarrow A' < g(x)).$$

Quelle hypothèse a-t-on utilisée ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1b, Exercice A.2.5

On a traduit $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a.

Si maintenant on définit $\eta = min(\eta_1, \eta_2)$, montrer que

$$0 < |x-a| < \eta \Rightarrow A < f(x)g(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1b, Exercice A.2.5

$$0 < |x-a| < \eta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow f(x) > \frac{l}{2} > 0 \\ 0 < |x-a| < \eta_2 \Rightarrow g(x) > \frac{2A}{l} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A < f(x)g(x).$$

Retour à l'exercice ▲

On peut étudier la fonction $-f(x)g(x)$, on est ramené au cas précédent.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.5

Tout est possible, trouver des exemples.

Retour à l'exercice ▲

Prendre par exemple $f(x) = x^2$, choisir plusieurs fonctions g.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3, Exercice A.2.5

Que se passe-t-il si

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x^4}.$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{|x|}.$$

Retour à l'exercice ▲

Quand x tend vers 0, f_1 a une forme indéterminée $0 \times \infty$.

Retour à l'exercice ▲

Encadrer la partie entière afin d'y voir plus clair.

Retour à l'exercice ▲

On a toujours $x-1<E(x)\leq x$. Donc

$$\frac{b}{x}-1<E\left(\frac{b}{x}\right)\leq\frac{b}{x}.$$

Attention à la manipulation des inégalités.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.6

Pour obtenir f_1, on doit multiplier les termes de l'inégalité par $\frac{x}{a}$, donc il faut distinguer x positif et x négatif.

Retour à l'exercice ▲

— Si $x > 0$

$$\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-1\right) < \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}\frac{x}{a}.$$

donc

$$\frac{b}{a}-\frac{x}{a} < \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{a}.$$

— Si $x < 0$

$$\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-1\right) > \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \geq \frac{b}{x}\frac{x}{a}.$$

donc

$$\frac{b}{a}-\frac{x}{a} > \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \geq \frac{b}{a}.$$

Comment conclure ?

Retour à l'exercice ▲

On étudie s'il existe une limite à droite puis une limite à gauche.

Retour à l'exercice ▲

Que vaut la limite de $E\left(\frac{x}{a}\right)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ?
Que vaut la limite de $E\left(\frac{x}{a}\right)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.6

Si $0 < x < a$ que vaut $E\left(\frac{x}{a}\right)$?
Si $-a < x < 0$ que vaut $E\left(\frac{x}{a}\right)$?

Retour à l'exercice ▲

Si $0 < x < a$,

$$E\left(\frac{x}{a}\right) = 0$$

Si $-a < x < 0$,

$$E\left(\frac{x}{a}\right) = -1$$

En déduire l'expression de $f_2(x)$ sur chacun de ces intervalles.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.6

Si $0 < x < a$,

$$f_2(x) = 0$$

Si $-a < x < 0$,

$$f_2(x) = -\frac{b}{x}$$

f_2 admet-elle une limite à droite de 0 ? une limite à gauche de 0 ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.7

Il faut obtenir une expression plus simple de $f(x)$. Ici, on élimine les valeurs absolues. On rappelle que $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f(x) &= \frac{x}{1 - x + \frac{x}{x}} = \frac{x}{2 - x} \\ \forall x < 0, \quad f(x) &= \frac{x}{1 - x - \frac{x}{x}} = -1 \end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.8

Une démonstration directe à partir de la définition de limite utiliserait $||a|-|b|| \leq |a-b|$, valable pour tout réels a et b. Autre idée, remarquer que $|f|$ est la composée de f et de $x \mapsto |x|$ qui est continue. Le résultat découle alors d'un théorème vu en cours.

Retour à l'exercice ▲

Un contre-exemple suffit.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.9

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires 4.2.2, la continuité de f le permet.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.10

On raisonne par double implication, l'une des deux est évidente.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.10

Il faut sans doute utiliser la question précédente, pour l'instant on ne voit pas clairement comment.
Ecrire les hypothèses.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.10

Si $T > 0$ est la période, si x_0 est un réel quelconque, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \;\; f(x_0) = f(x_0 + nT).$$

D'autre part

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.11

Ecrire la définition de f est continue en 0.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.11

Soit $\epsilon > 0$, utiliser la figure pour voir que $\eta = \ln(1+\epsilon)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.11

Montrer alors rigoureusement que

$$|x| < \eta \Rightarrow |e^x - 1| < \epsilon.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.11

On cherche η' tel que

$$|x - x_0| < \eta' \Rightarrow |e^x - e^{x_0}| < \epsilon.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.11

Utiliser les propriétés de l'exponentielle.

$$e^x - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.11

$$|e^x - e^{x_0}| < \epsilon \Longleftrightarrow |e^{x-x_0} - 1| < e^{-x_0}\epsilon.$$

Il suffit maintenant d'utiliser la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.11

$$|x - x_0| < \ln(1 + e^{-x_0}\epsilon) \Longrightarrow |e^{x-x_0} - 1| < e^{-x_0}\epsilon \Longrightarrow |e^x - e^{x_0}| < \epsilon.$$

Il suffit donc de choisir

$$\eta' = \ln(1 + e^{-x_0}\epsilon).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.12

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $g(x) = f(x) - x$: voir l'exercice A.1.21. L'unicité n'est pas garantie, il est facile de tracer le graphe d'un exemple de fonction f pour laquelle l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.12

Pour obtenir l'unicité raisonner par l'absurde, ou par contraposée.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.12

f décroissante signifie $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.13

Que peut-on dire de

$$k = \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} \ ?$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.13

On peut montrer que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Attention au sens des inégalités, il faut étudier 2 cas, $f(a) \leq f(b)$ et $f(b) \leq f(a)$.

Pour éviter ces 2 cas, on peut écrire plus simplement que l'image, par une fonction continue, d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné donc il existe a' et b' tels que :

$$f([a,b]) = [a', b'].$$

Montrer alors que

$$a' \leq k \leq b'.$$

Conclure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.14

On note T la période de l'application f.

Alors tout x réel peut s'écrire de façon unique $x = x_0 + nT$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in [0, T[$.

On a alors $f(x) = f(x_0)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.14

En déduire que

$$f(\mathbb{R}) = f([0, T[).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.14

On a de plus

$$f([0,T[) = f([0,T]).$$

Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.2.14

Il faut maintenant utiliser la propriété de continuité de f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Exercice A.2.14

L'image, par une fonction continue, d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné donc il existe a' et b' tels que :

$$f([0,T]) = [a',b'].$$

Conclure.

Retour à l'exercice ▲

$$f(\mathbb{R}) = [a', b']$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ a' \leq f(x) \leq b'.$$

f est bornée.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.16

La continuité uniforme n'est plus au programme.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.18

Il suffit de distinguer les cas $|x| < 1$ (pour lequel x^n tend vers 0 quand $n \to +\infty$) et $|x| > 1$ (pour lequel $|x|^n$ diverge vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, pour x^n on discute selon le signe de x et la parité de n).

Retour à l'exercice ▲